

Förderung des adaptiven Unterrichtens von Brüchen

Konzeption und Erprobung einer Lehrkräftefortbildung für praktizierende Mathematiklehrkräfte in der Sekundarstufe I

Sara Becker^{1,*}, Andreas Obersteiner² & Anika Dreher³

¹ Universität Tübingen

² Technische Universität München

³ Pädagogische Hochschule Freiburg

* Kontakt: Universität Tübingen,
Tübingen Center for Digital Education,
Keplerstrasse 17, 72074 Tübingen
Mail: sa.becker@uni-tuebingen.de

Zusammenfassung: Lehrkräfte stehen täglich vor der Aufgabe, ihren Unterricht und ihre Rückmeldungen an ihre Schülerinnen und Schüler so zu gestalten, dass diese zu den Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler passen und sie bestmöglich in ihrem weiteren Lernprozess unterstützt werden. Eine Voraussetzung für einen solch adaptiven Unterricht ist die diagnostische Kompetenz von Lehrkräften. Diese umfasst die Wahrnehmung von relevanten Merkmalen der diagnostischen Situation und die adäquate Interpretation dieser Merkmale. Die Interpretation der Merkmale basiert auf den zur Verfügung stehenden Ressourcen der Lehrkräfte, zum Beispiel ihrem professionellen Wissen. Durch gezieltes Üben anhand von authentischen Anforderungssituationen kann die diagnostische Kompetenz gefördert werden. Hierzu zählen die Förderung der kognitiven Prozesse der Wahrnehmung und Interpretation sowie des adaptiven Reagierens. Die hier vorgestellte Lehrkräftefortbildung bietet eine solche Möglichkeit für praktizierende Mathematiklehrkräfte im Inhaltsbereich Brüche. Anhand von authentischen Anforderungssituationen werden das Diagnostizieren von typischen Fehlerphänomenen und Fehlermustern in vorliegenden Lösungen von Schülerinnen und Schülern sowie Möglichkeiten, adaptiv darauf zu reagieren, in den Blick genommen. Die Komplexität und Authentizität dieser Anforderungssituationen nehmen im Laufe der Fortbildung zu. Die zur Verfügung gestellten unterstützenden und prozeduralen Informationen nehmen im Laufe der Fortbildung ab. Auf diese Weise werden die Lehrkräfte schrittweise an das Handeln in realen und häufig komplexen Unterrichtssituationen des Diagnostizierens und adaptiven Unterrichtens herangeführt.

Schlagwörter: Adaptiver Unterricht; Bruchrechnung; Diagnose; Lehrerfortbildung



Dieses Werk ist freigegeben unter der Creative-Commons-Lizenz CC BY-SA 4.0 (Weitergabe unter gleichen Bedingungen). Diese Lizenz gilt nur für das Originalmaterial. Alle gekennzeichneten Fremdinhalte (z.B. Abbildungen, Fotos, Tabellen, Zitate etc.) sind von der CC-Lizenz ausgenommen. Für deren Wiederverwendung ist es ggf. erforderlich, weitere Nutzungsgenehmigungen beim jeweiligen Rechteinhaber einzuholen. <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.de>

1 Einleitung

Bruchzahlen sowie das Rechnen mit Bruchzahlen sind aufgrund der Grundvorstellungs-umbrüche häufig mit fehlerhaft bearbeiteten Aufgaben bei Schülerinnen und Schülern verbunden (Padberg & Wartha, 2017). Meist reicht das reine Üben nicht aus, um diesen zentralen Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern zu begegnen. In Anlehnung an Prediger und Wittmann (2009) unterscheiden wir im weiteren Verlauf des Beitrages bei fehlerhaft bearbeiteten Aufgaben von Schülerinnen und Schülern zwischen dem *Fehlerphänomen*, dem *Fehlermuster* und der möglichen *Fehlerursache*. Fehlerphänomene beschreiben das unmittelbar sichtbare Produkt, also zum Beispiel die fehlerhaft bearbeiteten Aufgaben von Schülerinnen und Schülern im Inhaltsbereich Brüche, die der Lehrkraft vorliegen. Fehlermuster zeigen sich immer dann, wenn eine innere Logik dem Fehlerphänomen der Schülerinnen und Schüler zugrunde liegt, wie zum Beispiel der Annahme, ein größerer Nenner spiegelt stets einen größeren Bruch wider (Prediger & Wittmann, 2009). Fehlerursachen beschreiben mögliche, tieferliegende Gründe für dieses Fehlermuster, wie zum Beispiel der Übertrag von Rechenregeln der natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen (Prediger & Wittmann, 2009).

Es bedarf der diagnostischen Kompetenz von Lehrkräften, um Fehlerphänomene und Fehlermuster in vorliegenden Lösungen von Schülerinnen und Schülern zu erkennen, adäquat in Hinblick auf mögliche Fehlerursachen zu diagnostizieren und adaptiv auf diese Lösungen zu reagieren, um die Schülerinnen und Schüler bestmöglich in ihrem weiteren Lernprozess zu unterstützen (Brühwiler et al., 2017; Fischer et al., 2014).

Solch eine adäquate Diagnose durch eine Mathematiklehrkraft basiert auf der Wahrnehmung der für die Diagnose relevanten Merkmale der diagnostischen Situation und deren angemessener Interpretation (Blömeke et al., 2015; Loibl et al., 2020). Dazu benötigt die Mathematiklehrkraft spezifische kognitive Ressourcen, insbesondere professionelles Wissen, welches sie flexibel in der jeweiligen Situation abrufen kann (u.a. Lindmeier, 2011; Shulman, 1986).

Das anschließende Reagieren einer Lehrkraft basiert auf den wahrgenommenen Informationen und deren Interpretation (Loibl et al., 2020). Adaptives Reagieren einer Lehrkraft zeichnet sich dabei durch eine hohe Passung zu den individuellen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler und durch eine Unterstützung der Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf ein inhaltliches Ziel aus (Gallagher et al., 2020; Helmke, 2022; Prediger et al., 2022). Solch ein inhaltliches Ziel kann der Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen sein.

Empirische Studien haben gezeigt, dass insbesondere das Diagnostizieren im Unterrichtsgeschehen aufgrund der Situativität und der Komplexität des Unterrichtsgeschehens eine hohe Anforderung für Mathematiklehrkräfte darstellt (Grossman et al., 2009; Sherin et al., 2010). Für die Förderung dieser diagnostischen Kompetenz hat sich die Auseinandersetzung mit authentischen Anforderungssituationen für Mathematiklehrkräfte als gewinnbringend herausgestellt (u.a. Darling-Hammond & Snyder, 2000). Nach dem *4-Component-Instructional-Design-Modell* (4C/ID) werden solche authentischen Anforderungssituationen als „authentische Lernaufgaben“ bezeichnet (van Merriënboer, 2020). Die Komplexität der realen Unterrichtssituation kann in den authentischen Lernaufgaben variiert und zum Beispiel zu Beginn einer Fortbildung zunächst reduziert werden.

Vor diesem Hintergrund stellen wir in diesem Artikel eine Fortbildung vor, die anhand von authentischen Lernaufgaben das Diagnostizieren von Fehlermustern und -phänomenen in vorliegenden Lösungen von Schülerinnen und Schülern und möglichen zugrunde liegenden Fehlerursachen bei praktizierenden Mathematiklehrkräften fördert. Das Fortbildungsmodul berücksichtigt die kognitiven Prozesse der Wahrnehmung von relevanten Merkmalen, welche auf mögliche Fehlerursachen hinweisen können, und deren adäquate Interpretation durch Rückgriff auf professionelles Wissen. Außerdem werden durch das

Vergleichen und Reflektieren möglicher Reaktionen und Hilfestellungen Lerngelegenheiten in Bezug auf das adaptive Reagieren geboten. Die vorliegende Fortbildung fokussiert den Inhaltsbereich Brüche, da dieser für viele Schülerinnen und Schüler besonders anspruchsvoll ist (u.a. Torbeyns et al., 2014). Gleichzeitig stellt die Bruchrechnung aber auch einen wichtigen mathematischen Inhalt dar und kann als ein Prädiktor für spätere mathematische Leistung bei Schülerinnen und Schülern angenommen werden (z.B. Obersteiner et al., 2019; Siegler & Lortie-Forgues, 2017). Mathematiklehrkräften wird durch die Fortbildung die Möglichkeit geboten, ihre diagnostische Kompetenz in diesem Inhaltsbereich auszubauen, um ihre Schülerinnen und Schüler in ihrem weiteren Lernprozess bestmöglich zu unterstützen.

2 Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften als Voraussetzung für adaptiven Unterricht und adaptive Rückmeldungen

Diagnostische Kompetenz beschreibt eine zentrale Facette der professionellen Kompetenz von Lehrkräften. Sie wird als grundlegender Faktor für adaptiven Unterricht und insbesondere für adaptive Rückmeldungen, zum Beispiel auf Fehlerphänomene in bearbeiteten Aufgaben von Schülerinnen und Schülern, angesehen (Artelt & Gräsel, 2009; Urhahne & Wijnia, 2021). Die diagnostische Kompetenz von Mathematiklehrkräften, die in einer komplexen Unterrichtssituation benötigt wird, kann als *situationsbezogene* diagnostische Kompetenz spezifiziert werden (Jeschke et al., 2021). Nach dieser Definition zeigt sich die diagnostische Kompetenz von Lehrkräften während des Unterrichtsgeschehens unter anderem darin, wie a) zutreffend Lehrkräfte fehlerhafte Lösungen von Schülerinnen und Schülern im Hinblick auf mögliche zugrunde liegende Fehlerursachen einschätzen können (Gaidoschik et al., 2021) und b) sie diese Einschätzung für eine didaktische Entscheidung nutzen (Loibl et al., 2020).

Solch einer adaptiven Reaktion einer Lehrkraft liegt nach dem Verständnis von Leuders und Loibl (2021) ein kognitiver Informationsverarbeitungsprozess zugrunde, welcher die Prozesse der Wahrnehmung von relevanten Merkmalen der diagnostischen Situation und deren adäquate Interpretation umfasst. Weiterhin ist dieser Informationsverarbeitungsprozess dispositionsabhängig. Der Prozess erfordert zum Beispiel Fachwissen und fachdidaktisches Wissen der Lehrkraft, wie Wissen über Grund- und Fehlvorstellungen für den jeweiligen Aufgabenkontext und Wissen um Handlungsalternativen. Über dieses professionelle Wissen sollte die Lehrkraft nicht nur verfügen, sondern sie sollte es flexibel in der jeweiligen Unterrichtssituation zur angemessenen Interpretation der wahrgenommenen Informationen abrufen können (Lindmeier, 2011).

Diese situationsbezogene diagnostische Kompetenz von Lehrkräften kann durch die Auseinandersetzung mit realen oder praxisnahen Beispielen anhand von authentischen Lernaufgaben (vgl. van Merriënboer, 2020) gefördert werden. Lehrkräfte können so zum einen das selektive Wahrnehmen von diagnoserelevanten Informationen üben. Zum anderen kann der Prozess der Interpretation gefördert werden, indem notwendiges Wissen in einer konkreten Unterrichtssituation, zum Beispiel fachdidaktisches Wissen zu Fehlermustern und -ursachen bei der Bruchrechnung, wiederholt werden. Lehrkräfte werden dadurch angeregt, theoretisches Wissen mit der Diagnosesituation zu verknüpfen und für eine didaktische Entscheidung zu nutzen (Brühwiler et al., 2017; Fischer et al., 2014).

Empirische Studien haben gezeigt, dass insbesondere die situationsbezogenen Diagnosen im Unterrichtsgeschehen aufgrund der Fülle der Informationen eine große Herausforderung für Lehrkräfte darstellen können (u.a. Kellmann & Massey, 2013; Wirth et al., 2022). Lehrkräften fällt es dabei häufig schwer, die relevanten Informationen einer diagnostischen Situation wahrzunehmen (Leuders & Leuders, 2015; Kuntze & Dreher, 2015; Wirth et al., 2022). So zeigten Leuders und Leuders (2015) zum Beispiel, dass

Mathematiklehrkräfte bei der Analyse mathematischer Lösungen von Schülerinnen und Schülern nicht nur inhaltspezifische und diagnoserelevante Informationen wahrnahmen, sondern auch Aspekte, wie zum Beispiel die Sorgfalt, mit der die Schülerinnen und Schüler ihre Aufgaben bearbeiteten. Kuntze und Dreher (2015) stellten in ihrer empirischen Untersuchung zur diagnostischen Kompetenz von Mathematiklehrkräften heraus, dass die Lehrkräfte häufig Informationen zur Motivation der Schülerinnen und Schüler wahrnahmen. Darüber hinaus stellten sie fest, dass diese Informationen die für die Diagnose relevanten Informationen über mathematische Darstellungen teilweise überlagerten (Kuntze & Dreher, 2015). Auch Wirth et al. (2022) zeigten in einer Studie im arithmetischen Anfangsunterricht, dass Lehrkräfte bei einer Diagnoseaufgabe häufig Informationen über Konzentration, Emotion oder Sozialverhalten der Schülerinnen und Schüler wahrnahmen, welche für die geforderte Diagnose nicht relevant waren. Hingegen beachteten die Lehrkräfte die für die Diagnose relevanten Informationen, in dem Fall das Denken der Schülerinnen und Schüler, häufig nicht (Wirth et al., 2022).

3 Adaptive Rückmeldungen von Mathematiklehrkräften auf fehlerhaft bearbeitete Aufgaben von Schülerinnen und Schülern im Inhaltsbereich Brüche

Eine der großen Herausforderungen zu Beginn der Sekundarstufe I, bei denen viele Schülerinnen und Schüler adaptive Unterstützung benötigen, stellen die Bruchzahlen und das Rechnen mit Bruchzahlen dar (Padberg & Wartha, 2017; Siegler & Lortie-Forgues, 2017). Dies ist insbesondere auf die Zahlbereichserweiterung zu den natürlichen Zahlen nach der Grundschule und auf die Vermittlung von neuen Konzepten zurückzuführen, welche häufig der Intuition und Erfahrung sowie dem bisher Gelernten der Schülerinnen und Schüler widersprechen (Prediger et al., 2014). Zu dem Zeitpunkt in der Sekundarstufe, wenn Schülerinnen und Schüler den Themenbereich Brüche behandeln, verfügen sie bereits über Kenntnisse zu Zahlen und Rechenoperationen aus dem Primarbereich sowie Erfahrungen mit Zahlen und Rechenoperationen aus dem Alltag. Wendungen, wie „die Hälfte des Weges“ oder „halb 1“ sind vielen Schülerinnen und Schülern aus dem Alltag bekannt, ohne dass sie eine inhaltlich richtige Vorstellung zu ihnen entwickelt haben (Prediger et al., 2014). Weiterhin werden in der Grundschule Annahmen zu Grundrechenoperationen verinnerlicht, wie zum Beispiel „Multiplikation vergrößert“, die für das Rechnen mit Brüchen nicht oder nur teilweise übertragen werden können (Padberg & Wartha, 2017; Prediger et al., 2014).

Um Schülerinnen und Schüler bestmöglich in ihrem individuellen Lernprozess zu unterstützen, sollte eine Lehrkraft adaptiv auf Fehlermuster, welche sich in bearbeiteten Aufgaben von Schülerinnen und Schülern zeigen können, reagieren. Eine adaptive Rückmeldung umfasst nach Prediger et al. (2022) einerseits einen hohen Lernendenfokus und andererseits einen hohen Zielfokus. Ein hoher Lernendenfokus zeigt sich dann, wenn die Lehrkraft die individuellen Erfahrungen und Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler berücksichtigt, welche sich zum Beispiel in Fehlermustern widerspiegeln. Ein hoher Zielfokus zeigt sich in einer gezielten Hilfestellung durch die Lehrkraft, um ein inhaltliches Ziel zu erreichen (Helmke, 2022; Prediger et al., 2022). Solch ein inhaltliches Ziel kann zum Beispiel der Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern sein.

Abbildung 1 auf der folgenden Seite zeigt ein Beispiel eines solchen Fehlermusters eines Schülers im Bereich der Bruchrechnung. Den fehlerhaft bearbeiteten Aufgaben könnte die Fehlerursache zugrunde liegen, dass der Schüler die bereits bekannten Regeln der Addition der natürlichen Zahlen auf die Bruchrechnung überträgt und Zähler und Nenner daher separat addiert. Die Grundvorstellung eines Bruches, bestehend aus Zähler und Nenner, sowie die Bedeutungen des Zählers und des Nenners hat er noch nicht verinnerlicht. Um als Lehrkraft nun adaptiv auf diese Lösungen des Schülers zu reagieren,

muss die Lehrkraft zunächst das Fehlermuster des Schülers, dass er jeweils die Zähler und Nenner der Brüche separat addiert hat, wahrnehmen. Weiterhin muss die Lehrkraft dieses wahrgenommene Fehlermuster des Schülers unter Rückbezug auf ihre vorhandenen Ressourcen adäquat interpretieren (u.a. Loibl et al., 2020). Hierzu benötigt die Lehrkraft zum einen *fachliches Wissen* über den Inhaltsbereich Brüche und die Addition von ungleichnamigen Brüchen. Zum anderen benötigt die Lehrkraft *fachdidaktisches Wissen* a) über mögliche Fehlermuster und mögliche -ursachen im Inhaltsbereich Brüche und b) über das Vorgehen, Schülerinnen und Schüler adaptiv dabei zu unterstützen, diese Fehlerursachen durch den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen zu überwinden (Prediger & Selter, 2008; Shulman, 1986). Eine adaptive Rückmeldung einer Lehrkraft auf diese Lösung würde also sowohl das vorliegende Fehlermuster und die mögliche zugrunde liegende Fehlerursache adressieren (hoher Lernendenfokus) als auch Hilfestellungen dafür bieten, dass der Schüler eine tragfähige Grundvorstellung im Bereich der Addition von ungleichnamigen Brüchen aufbaut (vgl. Prediger et al., 2022). Hierzu könnte die Lehrkraft in Teilaufgabe a) bspw. ein Rechteck zeichnen, das in acht gleich große Teile eingeteilt ist, wovon fünf Teile markiert sind und ein weiteres, gleich großes Rechteck, das in vier gleich große Teile eingeteilt ist, wovon ein Teil markiert ist. Weiterhin würde die Lehrkraft den Schüler darauf hinweisen, dass durch eine Verfeinerung des zweiten Rechtecks zunächst eine gleich große Einteilung beider Rechtecke erzielt werden muss, bevor die markierten Teile zusammen in einem Rechteck angeordnet und dadurch addiert werden können.

Aufgabe 4.
Addiere folgende Brüche.
a) $\frac{5}{8} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{10}$

4) a) $\frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8}$
b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

Abbildung 1: Fehlerhaft bearbeitete Aufgaben eines Schülers im Bereich der Addition ungleichnamiger Brüche (eigene Darstellung)

4 Gestaltung einer Fortbildung zur Förderung der diagnostischen Kompetenz von Mathematiklehrkräften als Grundlage adaptiver Rückmeldungen im Inhaltsbereich Brüche

Zur Gestaltung einer Fortbildung zur Förderung der diagnostischen Kompetenz von Lehrkräften bietet sich der Einsatz von Vignetten an (Benz, 2020). Vignetten umfassen ausgewählte, kurze Unterrichtssituationen, die typische Anforderungen an Lehrkräfte authentisch abbilden und für deren Bewältigung Lehrkräfte professionelle Wissensfacetten benötigen (u.a. Kuntze & Friesen, 2020). Vignetten können somit eingesetzt werden, um an authentischen Lernaufgaben die diagnostische Kompetenz von Lehrkräften in Fortbildungen zu fördern. Die diagnostischen Aktivitäten beim Bearbeiten einer Vignette entsprechen dabei weitgehend dem diagnostischen Handeln in einer realen Unterrichtssituation.

Ein Vorteil des Einsatzes von Vignetten in Fortbildungen stellt die Variationsmöglichkeit der Komplexität der Diagnosesituation anhand von verschiedenen authentischen Lernaufgaben dar (Codreanu et al., 2021; Darling-Hammond & Snyder, 2000). So kann

Ausgangspunkt einer Fortbildung auf der Grundlage dieses Modells sind *authentische Lernaufgaben*, hier *diagnostische Lernaufgaben* (siehe (5) in Abb. 2), die in ihrer Komplexität reduzierte unterrichtliche Situationen (Deduktion) darstellen. Die jeweiligen Lernaufgaben werden während der Fortbildung mit passenden *unterstützenden Informationen* (siehe (6) in Abb. 2) und *prozeduralen Informationen* (siehe (7) in Abb. 2) angereichert.

Unterstützende Informationen werden nach dem 4C/ID-Ansatz vor der Bearbeitung einer Lernaufgabe zur Verfügung gestellt, sind jedoch nicht an die einzelne Lernaufgabe gebunden, sondern können über mehrere Lernaufgaben hinweg eingesetzt werden. Unterstützende Informationen liefern die „Theorie“, die der Lernaufgabe zugrunde liegt (Kollar & Fischer, 2008), und stellen eine Verbindung zwischen bereits vorhandenem deklarativem Wissen der Lehrkräfte und dessen Anwendung in den konkreten Lernaufgaben her (van Merriënboer, 2020). Konkret handelt es sich bei den unterstützenden Informationen – wie der Begriff bereits nahelegt – um Informationen, die die teilnehmenden Lehrkräfte in der jeweiligen Lernaufgabe unterstützen sollen. Für die Lernaufgaben der vorliegenden Fortbildung umfassen diese insbesondere fachliches und fachdidaktisches Wissen, welches für die spezifische diagnostische Situation relevant ist, wie zum Beispiel fachdidaktisches Wissen über inhaltsspezifische Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern (siehe (4) in Abb. 2).

Prozedurale Informationen werden nach dem 4C/ID-Ansatz „just-in-time“ während der Bearbeitung einer Aufgabe zur Verfügung gestellt (van Merriënboer, 2020), also genau dann, wenn sie benötigt werden. Prozedurale Informationen liefern Informationen zu Prozessen, zum Beispiel den kognitiven Prozessen, die während einer Diagnose ablaufen (siehe (3) in Abb. 2). Hierzu gehört die Wahrnehmung von relevanten Informationen in Fehlerphänomenen und Fehlermustern sowie deren adäquate Interpretation in Hinblick auf eine zugrunde liegende Fehlerursache. In der vorliegenden Fortbildung sind prozedurale Informationen zum Beispiel Hinweise darüber, woran und mit welchem Vorgehen adaptive zur Auswahl stehende Lehrkräftereaktionen erkannt werden können.

Im folgenden Kapitel werden die Lernaufgaben, die unterstützenden und prozeduralen Informationen sowie die schrittweise Durchführung der Fortbildung beschrieben. Die dargestellte Fortbildung richtet sich an Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufe I.

4.2 Durchführung der Fortbildung

Der Einstieg in die Fortbildung besteht aus einer Kontextualisierung, in welcher die Teilnehmenden in eine authentische, unterrichtliche Situation als diagnostischer Rahmen (siehe Abb. 2) eingeführt werden: *„Sie sind Mathematiklehrkraft einer sechsten Klasse und unterrichten derzeit das Themengebiet Brüche. Ihre Schülerinnen und Schüler arbeiten gerade selbstständig an Übungsaufgaben, während Ihnen bei der Durchsicht Fehlerphänomene und -muster in bearbeiteten Aufgaben von Schülerinnen und Schülern auffallen. Sie möchten adaptiv auf die jeweiligen Lösungen reagieren (diagnostisches Handeln, siehe Abb. 2), um die Schülerinnen und Schüler bestmöglich in ihrem weiteren Lernprozess zu unterstützen.“*

Die vorliegende Fortbildung besteht aus vier authentischen Lernaufgaben, welche die Lehrkräfte schrittweise auf die dargestellte Situation des Mathematikunterrichts vorbereiten. Die folgende tabellarische Übersicht verdeutlicht den Verlauf sowie die Konstituierung der Lernaufgaben mit den jeweiligen unterstützenden und prozeduralen Informationen sowie den jeweils zu erwerbenden Kompetenzen (siehe Tab. 1).

Im Folgenden wird die Durchführung der Fortbildung konkretisiert und dabei die einzelnen Lernaufgaben in Hinblick auf ihre theoretische Fundierung sowie Konzeptualisierung beschrieben. Ein besonderes Augenmerk wird dabei auf die in Tabelle 1 dargestellten Anforderungen und Ziele der jeweiligen Lernaufgabe, der zu erwerbenden Kompetenzen der Teilnehmenden in den Lernaufgaben sowie die unterstützenden und prozeduralen Informationen gelegt. Die Darstellung soll zur eigenen Durchführung einer

entsprechenden Fortbildung anregen. Im Anschluss werden in Kapitel 4.3 Einblicke in die erste Erprobung der Fortbildung sowie sich daraus ergebende Anpassungen der Lernaufgaben gegeben.

Tabelle 1: Übersicht über die im Fortbildungsmodul inkludierten authentischen Lernaufgaben (eigene Darstellung)

	Anforderungen und Ziele der jeweiligen Lernaufgabe	Zu erwerbende Kompetenzen	Unterstützende Informationen	Prozedurale Informationen
Lernaufgabe 1	Wahrnehmen und Interpretieren diagnoserelevanter Informationen	Die Teilnehmenden kennen mögliche Fehlermuster und -ursachen im Inhaltsbereich Brüche. Die Teilnehmenden können Fehlerphänomene sowie Fehlermuster in authentisch bearbeiteten Aufgaben erkennen und in Hinblick auf mögliche Fehlerursachen interpretieren.	Informationen zu Fehlermustern und möglichen Fehlerursachen sowie notwendigen Grundvorstellungen von Schülerinnen und Schülern im Inhaltsbereich Brüche.	Informationen zu den kognitiven Prozessen der Wahrnehmung und Interpretation von Fehlermustern in Lösungen von Schülerinnen und Schülern.
Lernaufgabe 2	Wahrnehmen und Interpretieren diagnoserelevanter Informationen sowie Auswahl einer adaptiven Lehrkräftereaktion	Die Teilnehmenden wissen, was eine adaptive Reaktion einer Lehrkraft ausmacht und können diese in authentischen Situationen erkennen.	Informationen zu adaptivem Unterrichten und adaptiven Lehrkräftereaktionen, insbesondere zu den Dimensionen Lernendenfokus und Zielfokus. Rückgriff auf bereits vermittelte Informationen zu den Grundvorstellungen und möglichen Fehlermustern und -ursachen im Bereich Bruchrechnung möglich.	Informationen, wie ein hoher Lernendenfokus und ein hoher Zielfokus in möglichen Lehrkräfteantworten wahrgenommen und angemessen interpretiert werden kann.
Lernaufgabe 3	Wahrnehmen und Interpretieren diagnoserelevanter Informationen sowie Auswahl einer adaptiven Lehrkräftereaktion und Wissen um den Einfluss motivationaler Aspekte	Die Teilnehmenden wissen, dass es diagnoserelevante und diagnoseirrelevante Informationen in diagnostischen Situationen geben kann und wissen um einen möglichen Überlagerungseffekt. Die Teilnehmenden können solche Informationen in authentischen Lernaufgaben identifizieren.	Informationen zu diagnoserelevanten und diagnoseirrelevanten Informationen.	Informationen zum möglichen Einfluss diagnoseirrelevanter Aspekte auf die kognitiven Prozesse der Wahrnehmung und Interpretation.
Lernaufgabe 4	Offene Abschlussaufgabe: Wahrnehmen und Interpretieren diagnoserelevanter Informationen sowie Formulierung einer eigenen, adaptiven Lehrkräftereaktion	Die Teilnehmenden können auf der Grundlage des bisher Gelernten sowie der weiterhin zur Verfügung stehenden prozeduralen Informationen eigene adaptive Antworten auf Fehlerphänomene formulieren.	Keine neu vermittelten Informationen. Rückgriff auf vermittelte Informationen möglich.	Keine neu vermittelten Informationen. Rückgriff auf vermittelte Informationen möglich.

Die vorliegende Fortbildung besteht aus vier authentischen Lernaufgaben. Jede Lernaufgabe umfasst jeweils zwei Arbeitsphasen mit konkreten Lösungen von Schülerinnen und Schülern und ist dabei wie folgt aufgebaut: Den Teilnehmenden werden zu Beginn jeder Lernaufgabe Fehlerphänomene und -muster in Form von bearbeiteten Aufgaben einer Schülerin bzw. eines Schülers zur Verfügung gestellt. Den Teilnehmenden wird zu Beginn jeder Lernaufgabe Zeit gegeben, sich individuell mit den Materialien auseinanderzusetzen. Anschließend werden im Plenum aus Teilnehmenden und dem bzw. der Fortbildenden die Materialien gemeinsam diskutiert. Ausgehend von den ersten Überlegungen erfolgt ein Input aus unterstützenden Informationen durch die bzw. den Fortbildende bzw. Fortbildenden, zum Beispiel zu möglichen Fehlermustern und -ursachen und notwendigen Grundvorstellungen von Schülerinnen und Schülern in dem Inhaltsbereich. Als nächster Schritt folgt die zweite Bearbeitungsphase mit authentischen Materialien von Schülerinnen und Schülern in der jeweiligen Lernaufgabe. Die Teilnehmenden sollen durch die zweite Bearbeitungsphase in jeder Lernaufgabe erfahren, dass ihnen die unterstützenden Informationen und das dadurch vermittelte spezifische fachdidaktische Wissen bei der selektiven Wahrnehmung diagnoserelevanter Informationen helfen. Aufgrund dessen erfolgt auch nach beiden Bearbeitungsphasen einer Lernaufgabe eine mündliche Reflexion durch die Teilnehmenden und die Fortbildende bzw. den Fortbildenden.

4.2.1 Lernaufgabe 1 verbunden mit unterstützenden Informationen zu Fehlermustern und -ursachen sowie prozeduralen Informationen zu den kognitiven Prozessen der Wahrnehmung und Interpretation dieser Muster in Hinblick auf mögliche Ursachen in Lösungen von Schülerinnen und Schülern

Lernaufgabe 1 fokussiert auf der Grundlage des in Abbildung 2 dargestellten Modells die Situation, fehlerhaft bearbeitete Aufgaben von Schülerinnen und Schülern im Bereich der Bruchrechnung auf mögliche zugrunde liegende Fehlermuster und -ursachen hin zu diagnostizieren. In Anlehnung an den 4C/ID-Ansatz (van Merriënboer, 2020) und das damit verbundene Konzept der zunehmenden Komplexität sowie Validität stellt Lernaufgabe 1 die einfachste der vier Lernaufgaben der Fortbildung für die Teilnehmenden dar. Für die Auseinandersetzung mit Fehlerphänomenen in bearbeiteten Aufgaben von Schülerinnen und Schülern im Bereich der Bruchrechnung und möglichen zugrunde liegenden Fehlerursachen werden in Lernaufgabe 1 zunächst die in Abbildung 1 dargestellten Lösungen eines Schülers bei der Addition von ungleichnamigen Brüchen präsentiert. Die Teilnehmenden werden gebeten, sich zunächst individuell mit den Fehlerphänomenen, dem Fehlermuster und möglichen zugrunde liegenden Fehlerursachen auseinanderzusetzen.

Bei der anschließenden Besprechung im Plenum wird deutlich, dass fast alle Teilnehmenden das Fehlermuster wahrnahmen, dass der Schüler jeweils die Zähler und Nenner separat addierte. Im gemeinsamen Austausch konnten jedoch wenige Mathematiklehrkräfte mögliche Ursachen für dieses Muster ausmachen.

Der Input des Fortbildenden, die unterstützenden Informationen, bezieht sich daher in Lernaufgabe 1 zum einen auf die Wiederholung von möglichen Fehlermustern und damit verbundenen Fehlerursachen sowie notwendigen Grundvorstellungen von Schülerinnen und Schülern bei der Addition von ungleichnamigen Brüchen im Speziellen und durch weitere Beispiele bei der Bruchrechnung im Allgemeinen. Die in den vorliegenden Lösungen in Abbildung 1 mögliche Fehlerursache wurde bereits in Kapitel 3 erläutert.

In der darauffolgenden Auseinandersetzung mit weiteren fehlerhaft bearbeiteten Aufgaben (wie in Abbildung 3) stehen diese Informationen für die Teilnehmenden während der Bearbeitung zur Verfügung. Weiterhin werden die Teilnehmenden anhand der prozeduralen Informationen darauf hingewiesen, zunächst aussagekräftige Merkmale der Lösungen wahrzunehmen und dann – unter Rückgriff auf die zuvor vermittelten

unterstützenden Informationen – in Hinblick auf mögliche Fehlerursachen zu interpretieren. Dies kann zum Beispiel dadurch erfolgen, dass sich die Teilnehmenden bewusst machen, welche Grundvorstellungen bei dem vorliegenden Fehlermuster des Schülers noch nicht aufgebaut sein könnten und mit welchen möglichen Erfahrungen und Wissen aus der Grundschule der Schüler die Aufgabe bearbeitet haben könnte.

Aufgabe 4.
Subtrahiere folgende Brüche.

a) $\frac{4}{7} - \frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{4} - \frac{3}{2}$

4a) $\frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{4} - \frac{3}{2} = 1$

Abbildung 3: Fehlerhaft bearbeitete Aufgaben eines Schülers im Bereich Subtraktion von zwei ungleichnamigen Brüchen (eigene Forschung)

4.2.2 Lernaufgabe 2 verbunden mit unterstützenden Informationen im Bereich adaptiven Unterrichtens und prozeduralen Informationen zu den kognitiven Prozessen der Wahrnehmung und Interpretation adaptiver Lehrkräftereaktionen

Lernaufgabe 2 fokussiert in Anlehnung an das in Abbildung 2 dargestellte Modell der Förderung diagnostischer Kompetenz von Lehrkräften neben der diagnostischen Situation auch das diagnostische Handeln der Lehrkraft. Neben der adäquaten Diagnose möglicher Fehlerursachen von Schülerinnen und Schülern in bearbeiteten Aufgaben nimmt die Komplexität in Lernaufgabe 2 dahingehend zu, dass zusätzlich eine adaptive Handlung basierend auf der Diagnose von der Lehrkraft eingefordert wird. Hierfür wird den teilnehmenden Lehrkräften anhand einer Text-Bild-Vignette (siehe Abbildung 4) neben den bereits in Lernaufgabe 1 dargestellten Fehlerphänomenen drei mögliche Lehrkräftereaktionen präsentiert. Durch die Auswahl einer der drei möglichen Lehrkräfteantworten wird den Teilnehmenden zunächst die Herausforderung genommen, mit einer eigenen Antwort als adaptive Unterstützung auf die vorliegenden Fehlerphänomene und -muster zu reagieren.

Jede dieser drei zur Auswahl stehenden Lehrkräftereaktionen in einer Vignette besteht aus einer kurzen verbalen Erklärung und einer Visualisierung, die im Unterrichtsgeschehen zum Beispiel eine Skizze widerspiegeln kann. Beides, sowohl die mündliche Erklärung als auch die Visualisierung, können als Reaktion einer Lehrkraft auf fehlerhafte Lösungen genutzt werden, welche den weiteren Lernprozess der Schülerinnen und Schüler unterstützen können (vgl. Friesen & Mecherlein, 2020). Die Konzeption der Lehrkräftereaktionen basiert auf dem Verständnis von Prediger et al. (2022), nachdem adaptives Reagieren einer Lehrkraft einen hohen Lernendenfokus und einen hohen Zielfokus umfasst. Die drei möglichen Lehrkräftereaktionen einer Vignette unterscheiden sich hierbei in ihrem Lernendenfokus und Zielfokus. In jeder Vignette gibt es eine Lehrkraftreaktion mit einem hohen Lernendenfokus und einem hohen Zielfokus, welche demnach aus fachdidaktischer Perspektive als adaptivste der drei angebotenen Lehrkräftereaktionen im Hinblick auf die jeweilige Lösung angesehen werden kann.

Die Konstruktion der Lehrkräftereaktionen in der vorliegenden Fortbildung basierte auf einer systematischen Entwicklung mit zwei praktizierenden Mathematiklehrkräften mit mehrjähriger Erfahrung im Unterrichten von Brüchen, die gebeten wurden, auf die

vorgegebenen fehlerhaften Lösungen der Schülerinnen und Schüler in einem offenen Format zu antworten. Die Adaptivität der daraus konstruierten Lehrkräftereaktionen in Hinblick auf die gegebenen Lösungen wurde von drei Expertinnen und Experten validiert, bei denen es sich um Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker von drei verschiedenen Universitäten handelt. Die ökologische Validität der Vignetten wurde von drei Mathematiklehrkräften mit mehrjähriger Erfahrung im Unterrichten von Brüchen bewertet.

In der Fortbildung setzen sich die Teilnehmenden zunächst individuell mit den Fehlerphänomenen und -mustern sowie den zur Verfügung stehenden Lehrkräftereaktionen auseinander. Im anschließenden Plenumsgespräch sowie der anschließenden Inputphase werden durch eine vergleichende Analyse der zur Auswahl stehenden Lehrkräftereaktionen die Kriterien für eine adaptive Reaktion von Lehrkräften herausgearbeitet. Den Teilnehmenden wird die theoretische Grundlage einer adaptiven Lehrkräftereaktion, bestehend aus einem hohen Lernendenfokus und einem hohen Zielfokus, vermittelt (vgl. Prediger et al., 2022).

In der zu bearbeitenden Vignette (siehe Abb. 4) besteht das Fehlermuster darin, dass die Schülerin ausschließlich die Nenner vergleicht und bei einem größeren Nenner auf einen größeren Bruch schließt. Eine mögliche Ursache ist der Übertrag der Größenverhältnisse der natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen. Lehrkräfteantwort 2 stellt in der vorliegenden Vignette die adaptivste der drei möglichen Lehrkräftereaktionen dar, da sie zum einen einen hohen Lernendenfokus aufweist, indem sie diese mögliche Fehlerursache konkret aufgreift. Zum anderen weist die Lehrkräftereaktion auch einen hohen Zielfokus auf, da die Antwort, verbunden mit der fachdidaktisch angemessenen Skizze, dazu beitragen kann, diese Ursache bei der Schülerin zu durchbrechen und eine tragfähige Grundvorstellung zur Bedeutung des Nenners aufzubauen.

Aufgabe 8.
Vergleiche folgende Brüche, indem du die Zeichen <; >; = zwischen den Brüchen einfügst.

a) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{7}$ d) $\frac{8}{15}$ $\frac{7}{12}$

8a) $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5} > \frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4} < \frac{3}{7}$ d) $\frac{8}{15} > \frac{7}{12}$

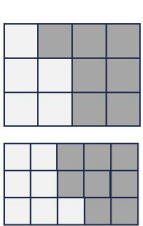
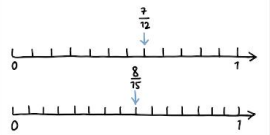
☐	☐	☐
„Lena, schau dir die Brüche von Aufgabe 8d in den Rechtecken an. Obwohl die ,8‘ größer als die ,7‘ ist, ist der zweite Teil des Rechtecks mehr. Kannst du dir das erklären?“ 	„Lena, schau dir die Brüche von Aufgabe 8d in den Bruchstreifen an. Obwohl die Fünfzehn größer als die Zwölf ist, ist der zweite graue Anteil mehr. Kannst du dir das erklären?“ 	„Lena, schau dir die Brüche von Aufgabe 8d an den Zahlenstrahlen an. Der erste Zahlenstrahl ist in zwölf Abschnitte eingeteilt und sieben markiert, der zweite in fünfzehn und acht markiert. Hier erkennst du, dass sieben Zwölftel größer ist. Kannst du dir das erklären?“ 

Abbildung 4: Beispielvignette mit fehlerhaften Lösungen einer Schülerin und drei möglichen Lehrkräftereaktionen, die sich in ihrer Adaptivität zu den vorliegenden Lösungen unterscheiden (eigene Forschung)

Bei der zweiten Bearbeitungsrunde in Lernaufgabe 2 stehen den Teilnehmenden zum einen die zuvor vermittelten unterstützenden Informationen über adaptive Lehrkräftereaktionen zur Verfügung. Zum anderen erhalten die Teilnehmenden während der Bearbeitung prozedurale Informationen in Form von Hinweisen zu den kognitiven Prozessen der Wahrnehmung und Interpretation von Aspekten, die auf einen hohen Lernendenfokus und einen hohen Zielfokus in Lehrkräftereaktionen hinweisen. Die prozeduralen Informationen umfassen sowohl Beispiele von Lehrkräftereaktionen mit hohem Lernenden- und hohem Zielfokus als auch konkrete Hinweise darüber, wie hoch der Lernendenfokus oder Zielfokus in den einzelnen der gegebenen Reaktionen ist.

4.2.3 Lernaufgabe 3 verbunden mit unterstützenden Informationen zu diagnoserelevanten und diagnoseirrelevanten Aspekten einer Lösung einer Schülerin bzw. eines Schülers und prozeduralen Informationen zum Einfluss von situativen Aspekten auf die kognitiven Prozesse der Wahrnehmung und Interpretation

Lernaufgabe 3 baut auf den zu erwerbenden Kompetenzen in Lernaufgabe 1 und 2 auf und steigert die Komplexität der Diagnoseleistung für Lehrkräfte, indem die zur Auswahl stehenden möglichen Lehrkräftereaktionen mit motivationalen Aspekten angerei-

chert sind (siehe Abb. 5). Neben der diagnostischen Situation, den fehlerhaft bearbeiteten Aufgaben von Schülerinnen und Schülern (vgl. Lernaufgabe 1) und dem diagnostischen Handeln, der Auswahl einer adaptiven Lehrkraftreaktion (vgl. Lernaufgabe 2), wird in Lernaufgabe 3 das diagnostische Denken einer Lehrkraft bei der adaptiven Unterstützung von Schülerinnen und Schülern fokussiert (siehe Abb. 2). Hierbei werden die Informationsverarbeitungsprozesse der Wahrnehmung und Interpretation von diagnose-relevanten Informationen in den Lösungen von Schülerinnen und Schülern sowie Lehrkräftereaktionen in den Blick genommen und durch eine Akzentuierung auf mögliche Überlagerungseffekte diagnoseirrelevanter Informationen ergänzt. Solch überlagernde Informationen können zum Beispiel rein motivationale Aspekte sein, die in der vorliegenden Situation nicht diagnoserelevant sind, wie ein springendes Känguru in Lehrkräftereaktion 3 in Abbildung 5.

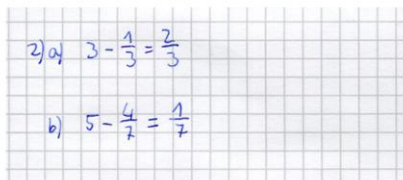
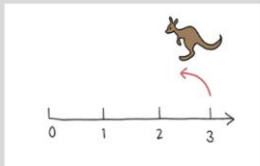
Aufgabe 2. Subtrahiere und stelle das Ergebnis als unechten Bruch dar. a) $3 - \frac{1}{3}$ b) $5 - \frac{4}{7}$ 		
☐ „Finn, schauen wir uns Aufgabe 2a noch einmal an. Die Zahl ‚3‘ kannst du auch als Bruch mit Zähler und Nenner schreiben. Zeichnen wir hierfür drei Kreise. Wenn du jetzt von einem Kreis ein Drittel wegnimmst, wie viele Drittel sind dann insgesamt noch übrig?“ 	☐ „Finn, schauen wir uns Aufgabe 2a noch einmal an. Du kannst dir die Subtraktion als ein Wegnehmen vorstellen. Wenn du jetzt von der ersten Pizza ein Drittel wegnimmst, dann sind zwei Ganze und zwei Drittel übrig, siehst du?“ 	☐ „Finn, schauen wir uns Aufgabe 2a noch einmal an. Du kannst dir die Subtraktion als ein Zurückgehen vorstellen. Du startest bei der ‚3‘ und gehst ein Drittel zurück. Wo landest du dann auf dem Zahlenstrahl?“ 

Abbildung 5: Beispielvignette mit fehlerhaften Lösungen eines Schülers und drei möglichen Lehrkräftereaktionen, die sich in ihrer Adaptivität zu den vorliegenden Lösungen unterscheiden, und zusätzlich mit motivationalen Aspekten angereichert wurden (eigene Forschung)

In den zur Auswahl stehenden Lehrkräftereaktionen sind zusätzlich zu den diagnose-relevanten Informationen Aspekte eingearbeitet, die für die Diagnose der Fehlerursache und für die Auswahl der adaptiven Lehrkräftereaktion nicht relevant sind. Solche Aspekte können zum Beispiel rein motivationale Aspekte sein, die nach Kuntze und Friesen (2020) zu einem Überlagerungseffekt von fachdidaktisch relevanten Informationen führen und Lehrkräfte bei der Diagnose vom eigentlichen Diagnoseziel ablenken können. Die Vignetten der vorliegenden Fortbildung wurden daher so konstruiert, dass diejenigen Lehrkräftereaktionen, die keinen hohen Lernendenfokus oder hohen Zielfokus enthielten, mit diagnoseirrelevanten Informationen, in dem Fall rein motivationalen Aspekten,

angereichert wurden. Durch die Anreicherung der Lehrkräftereaktionen mit motivationalen Aspekten soll bei den Teilnehmenden dieser Überlagerungseffekt provoziert und dadurch ein Bewusstsein für die Reichhaltigkeit von Informationen in einer authentischen Unterrichtssituation geschaffen werden (Grossman et al., 2009).

Konkret könnten sich die Teilnehmenden der Fortbildung in der dargestellten Vignette in Lernaufgabe 3 (siehe Abb. 5) durch das als rein motivationaler Aspekt vorhandene Känguru für die Schülerinnen und Schüler dazu verleiten lassen, Lehrkräftereaktion 3 auszuwählen. Hierbei sollten die Teilnehmenden allerdings auch wahrnehmen und adäquat interpretieren, dass sowohl durch die Zeichnung und Einteilung des dargestellten Zahlenstrahls als auch durch die fachlich unzureichende Erklärung der Lehrkraft in der Lehrkräftereaktion 3 („Du startest bei der ‚3‘ und gehst ein Drittel zurück“) keine tragfähige Grundvorstellung der Subtraktion eines Bruches von einer natürlichen Zahl bei Schülerinnen und Schülern aufgebaut werden kann. Zum Beispiel wird in der unzureichenden Erklärung und Darstellung für den Schüler Finn nicht deutlich, worauf sich die $1/3$ beziehen.

In der Fortbildung erfolgt ausgehend von gemeinsamen Überlegungen im Plenum in der Inputphase eine Vermittlung von unterstützenden Informationen bezüglich des möglichen Einflusses von solchen diagnoseirrelevanten Informationen auf die kognitiven Prozesse der Wahrnehmung und der Interpretation von Lehrkräften in diagnostischen Situationen (vgl. Kuntze & Friesen, 2020). In der darauffolgenden Bearbeitung einer weiteren Vignette werden die Teilnehmenden zusätzlich anhand der prozeduralen Informationen darauf hingewiesen, zum einen möglichst alle Informationen einer diagnostischen Situation wahrzunehmen und zum anderen die wahrgenommenen Informationen in Hinblick auf ihre Diagnoserelevanz für die jeweilige Situation zu interpretieren. Hierzu werden den Teilnehmenden Beispiele für solche relevanten und irrelevanten Informationen zur Verfügung gestellt.

4.2.4 Lernaufgabe 4 – Offene Abschlussaufgabe verbunden mit Möglichkeiten des Rückgriffs auf die vermittelten unterstützenden und prozeduralen Informationen

Als Abschluss des Fortbildungsmoduls wird ein offenes Aufgabenformat in den Text-Bild-Vignetten gewählt. Die Teilnehmenden erhalten erneut Fehlerphänomene und Fehlermuster in Form von fehlerhaft bearbeiteten Aufgaben von Schülerinnen und Schülern im Inhaltsbereich Brüche. Allerdings werden den Teilnehmenden in Lernaufgabe 4 keine drei möglichen Lehrkräftereaktionen als Auswahl zur Verfügung gestellt. So repräsentiert die letzte Lernaufgabe valide die reale Unterrichtssituation für Mathematiklehrkräfte. Weiterhin kann anhand der frei formulierten Reaktionen die Adaptivität und damit die Adäquatheit der Antworten der Teilnehmenden abgelesen werden. Den Teilnehmenden stehen während der Diagnose der Fehlermuster und möglichen zugrunde liegenden Fehlerursachen sowie während der Formulierung einer adaptiven Reaktion die bereits erlernten unterstützenden und prozeduralen Informationen zur Verfügung. Neue Informationen werden in dieser Lernaufgabe nicht vermittelt.

Im Anschluss an die individuelle Erstellung einer adaptiven Rückmeldung für die jeweiligen Schülerinnen und Schüler erfolgt ein Austausch zwischen Teilnehmenden und Fortbildender bzw. Fortbildendem sowie eine Reflexion über die entworfenen Reaktionen.

4.3 Erkenntnisse aus der Durchführung der Fortbildung und Ansätze zur Weiterentwicklung

Die vorliegende Fortbildung wurde im Rahmen eines vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst des Landes Baden-Württemberg geförderten Forschungs-

und Nachwuchskollegs „Diagnostische Kompetenzen von Lehrkräften (DiaKom): Einflüsse, Struktur und Förderung“ im Jahr 2022 und im Jahr 2023 an der Pädagogischen Hochschule Freiburg mit insgesamt $N = 16$ Mathematiklehrkräften durchgeführt.

Die Durchführung der Fortbildung zeigte in Hinblick auf die Bearbeitung der authentischen Lernaufgaben, dass die Teilnehmenden unterschiedliche Informationen aus der diagnostischen Situation, zum Beispiel bei Lernaufgabe 1, und auch aus den zur Auswahl gestellten Situationen des diagnostischen Handelns wahrnahmen und in ihren Diagnosen verarbeiteten. Die gemeinsamen Reflektionen nach diesen individuellen Phasen machten deutlich, dass dies unter anderem auf die unterschiedlichen Voraussetzungen der Teilnehmenden, wie Lehrerfahrung im Inhaltsbereich Brüche, zurückzuführen war. Darüber hinaus wurde anhand der Rückmeldungen ersichtlich, dass einige Teilnehmende bereits über fachdidaktisches Wissen im Inhaltsbereich Brüche verfügten und dieses auch situationsbezogen anwenden konnten, andere hingegen noch nicht. Für einige Teilnehmenden waren neue Informationen enthalten, andere Teilnehmende schätzten die Vermittlung als gewinnbringende Reaktivierung ihres bereits gelernten fachdidaktischen Wissens ein.

Nach der Durchführung der Fortbildung und den Rückmeldungen der Teilnehmenden zu den einzelnen Lernaufgaben sowie zu der Fortbildung im Gesamten wurden einige Anpassungen an der Fortbildung vorgenommen. Die in Kapitel 4.2 dargestellte Version der Fortbildung entspricht bereits der angepassten Version. Die Anpassungen und ihre Gründe werden im Folgenden kurz geschildert.

Lernaufgabe 2 und 3 wurden in der vorliegenden Form erst nach der Durchführung der Fortbildung und den Rückmeldungen der Teilnehmenden als separate Lernaufgaben in das Fortbildungsmodul aufgenommen. In der durchgeführten Version der Fortbildung wurden die Lehrkräftereaktionen von Beginn an mit den motivationalen Aspekten präsentiert. Da insbesondere diese jedoch sehr intensiv besprochen wurden, wie im nächsten Absatz berichtet wird, schlagen wir das angepasste, hier dargestellte Vorgehen (vgl. Kapitel 4.2) für die Fortbildung vor.

In den Reflexionsphasen der Lernaufgabe 3 erfolgte ein intensiver Austausch über die motivationalen Aspekte. Diese gemeinsame Besprechung und der darauffolgende Input war für die Teilnehmenden sehr eindrücklich, da grundsätzlich rein motivationale Aspekte, wie Alltagsbezüge, von den meisten Teilnehmenden als ausschließlich positiv für ihre eigenen Schülerinnen und Schüler angesehen wurden. Die Sensibilisierung für einen möglichen Überlagerungseffekt (vgl. Kuntze & Friesen, 2020) war von großer Bedeutung für die Teilnehmenden.

Die klare Trennung von unterstützenden und prozeduralen Informationen wurde erst nach der Durchführung eingeführt, da manche Informationen als Grundlage dienten und andere Informationen während des Prozesses genutzt wurden.

Eine weitere Anpassung der Fortbildung nach der ersten Durchführung bestand darin, dass Lernaufgabe 4 als Wunsch und Rückmeldung der Teilnehmenden aufgenommen wurde. Es wurde als wichtig erachtet, die gegebenen fiktiven Lehrkräftereaktionen mit eigenen Antworten und Reaktionen zu vergleichen. Wir schlagen daher aufgrund der in Kapitel 4 dargestellten Argumente vor, die Formulierung einer offenen Antwort als Lernaufgabe 4 zu etablieren.

5 Fazit und Ausblick

Die vorgestellte Lehrkräftefortbildung zur Förderung der diagnostischen Kompetenz von praktizierenden Mathematiklehrkräften im Inhaltsbereich Brüche weist darauf hin, dass die Konzeptualisierung einer Fortbildung auf der Basis des entwickelten Modells (siehe Abb. 2) und der Fokussierung auf authentische Lernaufgaben vielversprechend zu sein scheint, um Lehrkräfte schrittweise an Herausforderungen des diagnostischen Handelns heranzuführen. Die erste Durchführung der Fortbildung legt nahe, dass Lehrkräfte

durch die gezielte Auseinandersetzung mit authentischen, aber in ihrer Komplexität zunächst reduzierten Unterrichtssituationen in ihrer diagnostischen Kompetenz gefördert werden können. Insbesondere die Kombination aus unterstützenden Informationen vor der Bearbeitung der Lernaufgaben und prozeduralen Informationen während der Bearbeitung der Lernaufgaben bietet einen gewinnbringenden Ansatz, die Lehrkräfte zu unterstützen, diagnoserelevante Informationen gezielt wahrzunehmen und adäquat zu interpretieren. Durch die prozeduralen Informationen können darüber hinaus Lehrkräfte mit verschiedenem Vorwissen berücksichtigt werden, indem a) aufgrund unterschiedlicher Voraussetzungen oder b) mit zunehmender Übung prozedurale Informationen immer weniger von den Teilnehmenden bei der Bearbeitung herangezogen werden.

Wir sind davon überzeugt, dass das vorgestellte Modell sowie die vorgestellte Fortbildung eine vielversprechende Grundlage für die Entwicklung und Implementierung weiterer Fortbildungsmaßnahmen anderer mathematischer und nicht-mathematischer Inhalte darstellt. Um den generalisierbaren Mehrwert der Fortbildung zu steigern, empfehlen wir, zukünftig die Evaluation der Fortbildungsmaßnahmen zu konkretisieren und auf eine Meta-Ebene zu heben, um so den übergreifenden Nutzen für die Community noch besser herauszustellen. Die Übertragbarkeit auf andere Fortbildungsinhalte, insbesondere zur Förderung komplexer Aufgaben und Kompetenzen, bietet ein großes Potenzial für die kontinuierliche Weiterentwicklung der Kompetenzen von Lehrkräften.

Literatur und Internetquellen

- Artelt, C. & Gräsel, C. (2009). Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 23 (34), 157–160. <https://doi.org/10.1024/1010-0652.23.34.157>
- Benz, J. (2020). Lehren und Lernen mit Vignetten in allen Phasen der Lehrerbildung – eine Einführung. In M.E. Friesen, J. Benz, T. Billion-Kramer, C. Heuer, H. Lohse-Bossenz, M. Resch & J. Rutsch (Hrsg.), *Vignettenbasiertes Lernen in der Lehrerbildung: Fachdidaktische und pädagogische Perspektiven* (S. 12–27). Beltz Juventa.
- Blömeke, S., Gustafsson, J.-E. & Shavelson, R.J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie*, 223 (1), 3–13. <https://doi.org/10.1027/2151-2604/a000194>
- Brühwiler, C., Helmke, A. & Schrader, F.-W. (2017). Determinanten der Schulleistung. In M.K.W. Schweer (Hrsg.), *Lehrer-Schüler-Interaktion: Inhaltsfelder, Forschungsperspektiven und methodische Zugänge* (Schule und Gesellschaft, Bd. 24) (3. Aufl.) (S. 291–314). Springer VS.
- Codreanu, E., Sommerhoff, D., Huber, S., Ufer, S. & Seidel, T. (2021, 30. April). Exploring the Process of Preservice Teachers' Diagnostic Activities in a Video-Based Simulation. *Frontiers in Education*, 6, Artikel 626666. <https://doi.org/10.3389/educ.2021.626666>
- Darling-Hammond, L. & Snyder, J. (2000). Authentic Assessment of Teaching in Context. *Teaching and Teacher Education*, 16 (5–6), 523–545.
- Fischer, C., Kopmann, H., Rott, D., Veber, M. & Zeinz, H. (2014). Adaptive Lehrkompetenz und pädagogische Haltung: Lehrerbildung für eine inklusive Schule. In K. Zierer (Hrsg.), *Jahrbuch für Allgemeine Didaktik: Allgemeine Didaktik für eine inklusive Schule* (Jahrbuch für allgemeine Didaktik, Bd. 2) (S. 16–34). Schneider Verlag Hohengehren.
- Friesen, M.E. & Mecherlein, R. (2020). Vignetten in der ersten und zweiten Phase der Lehrerbildung im Fach Mathematik. Ein Brückenschlag zwischen Theorie und Praxis. In M.E. Friesen, J. Benz, T. Billion-Kramer, C. Heuer, H. Lohse-Bossenz, M. Resch & J. Rutsch (Hrsg.), *Vignettenbasiertes Lernen in der Lehrerbildung: Fachdidaktische und pädagogische Perspektiven* (S. 119–137). Beltz Juventa.

- Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M. & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. Leitlinie der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 47 (111S), 3–19. <https://hdl.handle.net/10863/19184>
- Gallagher, M.A., Parsons, S.A. & Vaughn, M. (2020). Adaptive Teaching in Mathematics: A Review of the Literature. *Educational Review*, 74 (2), 298–320. <https://doi.org/10.1080/00131911.2020.1722065>
- Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. & Williamson, P.W. (2009). Teaching Practice: A Cross-Professional Perspective. *Teachers College Record: The Voice of Scholarship in Education*, 111 (9), 2055–2100. <https://doi.org/10.1177/016146810911100905>
- Helmke, A. (2022). *Unterrichtsqualität und Professionalisierung: Diagnostik von Lehr-Lern-Prozessen und evidenzbasierte Unterrichtsentwicklung* (umfassend aktual. Neuausgabe). Klett Kallmeyer.
- Jeschke, C., Kuhn, C., Heinze, A., Zlatkin-Troitschanskaia, O., Saas, H. & Lindmeier, A.M. (2021). Teachers' Ability to Apply Their Subject-Specific Knowledge in Instructional Settings – A Qualitative Comparative Study in the Subjects Mathematics and Economics. *Frontiers in Education*, 6, 683962. <https://doi.org/10.3389/feduc.2021.683962>
- Kellman, P.J. & Massey, C.M. (2013). Perceptual Learning, Cognition, and Expertise. *Psychology of Learning and Motivation*, 46 (58), 117–165. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-407237-4.00004-9>
- Kollar, I. & Fischer, F. (2008). Was ist eigentlich aus der neuen Lernkultur geworden? Ein Blick auf Instruktionsansätze mit Potenzial zur Veränderung kulturell geteilter Lehr- und Lernskripts. *Zeitschrift für Pädagogik*, 54 (1), 49–62. <https://doi.org/10.25656/01:4335>
- Kuntze, S. & Dreher, A. (2015). PCK and the Awareness of Affective Aspects Reflected in Teachers' Views About Learning Opportunities – A Conflict? In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Hrsg.), *From Beliefs to Dynamic Affect Systems in Mathematics Education: Exploring a Mosaic of Relationships and Interactions* (Advances in Mathematics Education, Bd. 8, S. 295–318). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4_15
- Kuntze, S. & Friesen, M.E. (2020). Lernen mit „Representations of Practice“ – Vignetteninsatz zwischen realistischen Praxisbezügen und inhaltlichen Zielen professionellen Lernens: Die doppelte Repräsentationsfunktion von Vignetten. In M.E. Friesen, J. Benz, T. Billion-Kramer, C. Heuer, H. Lohse-Bossenz, M. Resch & J. Rutsch (Hrsg.), *Vignettenbasiertes Lernen in der Lehrerbildung: Fachdidaktische und pädagogische Perspektiven* (S. 53–69). Beltz Juventa.
- Leuders, J. & Leuders, T. (2015, Januar). *Assessing and Supporting Diagnostic Skills in Pre-service Mathematics Teacher Education*. Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36. Vancouver.
- Leuders, T., & Loibl, K. (2021). Beyond Subject Specificity – Student and Teacher Thinking as Sources of Specificity in Teacher Diagnostic Judgments. *RISTAL*, 4 (1), 60–70. <https://doi.org/10.23770/rt1842>
- Lindmeier, A. (2011). *Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers: A Threefold Domain-Specific Structure Model for Mathematics* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 7) [Dissertation]. Waxmann.
- Loibl, K., Leuders, T. & Dörfler, T. (2020). A Framework for Explaining Teachers' Diagnostic Judgements by Cognitive Modeling (DiaCoM). *Teaching and Teacher Education*, 35 (91), 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103059>

- Obersteiner, A., Dresler, T., Bieck, S.M. & Moeller, K. (2019). Understanding Fractions: Integrating Results from Mathematics Education, Cognitive Psychology, and Neuroscience. In A. Norton & M. W. Alibali (eds.), *Construction Number. Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education* (S. 135–162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_7
- Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0>
- Prediger, S., Quabeck, K. & Erath, K. (2022). Conceptualizing Micro-Adaptive Teaching Practices in Content-Specific Ways: Case Study on Fractions. *Journal on Mathematics Education*, 13 (1), 1–30. <https://doi.org/10.22342/jme.v13i1.pp1-30>
- Prediger, S. & Selter, C. (2008). Diagnose als Grundlage für individuelle Förderung im Unterricht. *Schule NRW*, 60 (3), 113–116.
- Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S. & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können – Brüche, Prozente, Dezimalzahlen. Förderbausteine und Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen*. Cornelsen.
- Prediger, S. & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich? *PM: Praxis der Mathematik in der Schule*, 51 (27), 1–8.
- Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Sherin, M., Jacobs, V. & Philipp, R. (Hrsg.). (2010). *Mathematics Teacher Noticing: Seeing Through Teachers' Eyes*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203832714>
- Siegler, R.S. & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard Lessons: Why Rational Number Arithmetic Is So Difficult for So Many People. *Current Directions in Psychological Science*, 26 (4), 346–351. <https://doi.org/10.1177/0963721417700129>
- Torbeyns, J., Schneider, M., Ziqiang, X. & Siegler, R. (2014). Bridging the Gap: Fraction Understanding Is Central to Mathematics Achievement in Students from Three Different Continents. *Learning and Instruction*, 37 (23), 5–13. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>
- Urhahne, D. & Wijnia, L. (2021). A Review of the Accuracy of Teacher Judgments. *Educational Research Review*, 32 (4), 100374.
- van Merriënboer, J.J.G. (2020). Das Vier-Komponenten Instructional Design (4C/ID) Modell. In H.M. Niegemann & A. Weinberger (Hrsg.), *Handbuch Bildungstechnologie: Konzeption und Einsatz digitaler Lernumgebungen* (S. 153–170). Springer.
- Wirth, S., Friesen, M., Philipp, K. & Streit, C. (2022, Februar). *Pre-Service Teachers' Use of Information When Diagnosing First Graders' Number Sense*. 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12). <https://hal.science/hal-03744322/document>

Förderhinweis

Die Text-Bild-Vignetten entstanden im Rahmen eines vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst des Landes Baden-Württemberg geförderten Forschungs- und Nachwuchskollegs „Diagnostische Kompetenzen von Lehrkräften (DiaKom): Einflüsse, Struktur und Förderung“.

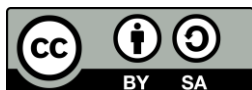
Beitragsinformationen

Zitationshinweis:

Becker, S., Obersteiner, A. & Dreher, A. (2025). Förderung des adaptiven Unterrichtens von Brüchen. Konzeption und Erprobung einer Lehrkräftefortbildung für praktizierende Mathematiklehrkräfte in der Sekundarstufe I. *HLZ – Herausforderung Lehrer*innenbildung*, 8 (1), 358–377. <https://doi.org/10.11576/hlz-7152>

Eingereicht: 08.04.2024 / Angenommen: 06.10.2024 / Online verfügbar: 07.11.2025

ISSN: 2625–0675



Dieses Werk ist freigegeben unter der Creative-Commons-Lizenz CC BY-SA 4.0 (Weitergabe unter gleichen Bedingungen). Diese Lizenz gilt nur für das Originalmaterial. Alle gekennzeichneten Fremdinhalte (z.B. Abbildungen, Fotos, Tabellen, Zitate etc.) sind von der CC-Lizenz ausgenommen. Für deren Wiederverwendung ist es ggf. erforderlich, weitere Nutzungsgenehmigungen beim jeweiligen Rechteinhaber einzuholen. <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.de>

English Information

Title: Teacher Training on Adaptive Teaching of Fractions. Designing and Testing a Training for In-Service Mathematics Teachers in Secondary School

Abstract: Every day, teachers face the challenge of adapting their teaching and feedback to their students in such a way that, on the one hand, the individual student's learning needs are considered, and, on the other hand, the students are supported in their further learning process in the best possible way. A prerequisite for such adaptive teaching is teachers' diagnostic competence, which includes the perception of relevant aspects of the diagnostic situation and the appropriate interpretation of those aspects. The interpretation of those aspects is based on teachers' available resources, such as their professional knowledge. Authentic learning tasks provide learning opportunities that can promote the development of teachers' diagnostic competence with the underlying cognitive processes of perception and interpretation and the adaptive response. The teacher training presented here provides such an opportunity for in-service mathematics teachers in the content area of fractions. Authentic learning tasks are used to support the diagnosis of misconceptions in students' solutions in the content area of fractions and teachers' adaptive responses. The complexity and authenticity of these learning tasks increase throughout the training while the provided supporting and procedural information decreases. In this way, teachers are gradually introduced to real and often complex diagnostic and adaptive teaching situations.

Keywords: adaptive teaching; fractions; diagnostic judgement; further education for teachers