

Wie können Diagnosefähigkeiten der Aufgabeneinschätzung gefördert werden?

Konzeption einer Fortbildung nach dem 4C/ID-Modell

Kirsten Brunner^{1,*}, Timo Leuders¹ & Andreas Obersteiner²

¹ Pädagogische Hochschule Freiburg

² Technische Universität München

* Kontakt: Pädagogische Hochschule Freiburg,
Institut für Mathematische Bildung
Kunzenweg 21, 79117 Freiburg
Mail: kirsten.brunner@ph-freiburg.de

Zusammenfassung: Wenn Lehrkräfte Mathematik unterrichten, sind sie gefordert, die Inhalte an die Voraussetzungen der Lernenden anzupassen. Grundlegend hierzu ist diagnostische Kompetenz, also die Fähigkeit, die Leistung von Lernenden oder die Qualität des Lernmaterials nach fachdidaktischen Kriterien angemessen zu beurteilen. In diesem Zusammenhang spielen Aufgaben eine bedeutende Rolle. Welche Aufgabe wann und vor allem für wen geeignet ist, darüber muss die Lehrkraft gute Entscheidungen treffen können. Ferner sollte sie fehlerhafte Schüler*innenlösungen schnell einordnen und geeignete Hilfestellung anbieten können.

Wie insbesondere die Fähigkeit der Aufgabeneinschätzung als Facette diagnostischer Kompetenz geschult werden kann, soll in diesem Artikel verdeutlicht werden. Dazu haben wir auf Grundlage aktueller Forschungsbefunde zum Einfluss von fachdidaktischem Wissen auf die Kompetenz der diagnostischen Aufgabeneinschätzung im Bereich Funktionen eine Fortbildung konzipiert, die den Prinzipien des Instruktionsmodells *4-Component-Instructional-Design* (4C/ID) folgt. Das Modell formuliert auf der Basis lernpsychologischer Befunde Prinzipien, wie Lernsituationen für komplexe Fähigkeiten gestaltet sein sollten. Die hier beschriebene Fortbildung ist eine Weiterentwicklung eines Hochschulseminars mit ähnlichem Inhalt. Im Rahmen einer wissenschaftlichen Evaluation dieses Seminars konnten bedeutende Lerneffekte auf die Fähigkeiten zur effizienten Aufgabeneinschätzung der Studierenden gezeigt werden. Ziel der hier vorgestellten Fortbildung ist es, die komplexe diagnostische Fähigkeit der Einschätzung von Aufgaben und Schüler*innenlösungen zu unterstützen.

Dieser Beitrag zeigt exemplarisch, wie eine Fortbildung nach dem 4C/ID-Modell gestaltet werden kann, um komplexe Kompetenzen von Lehrkräften in einer kurzen Fortbildungsmaßnahme zu fördern.

Schlagwörter: Diagnose; Aufgabenanalyse; Fehler; Funktion (Math.); funktionales Denken; adaptiver Unterricht; Instruktionsdesign; Fortbildung



Dieses Werk ist freigegeben unter der Creative-Commons-Lizenz CC BY-SA 4.0 (Weitergabe unter gleichen Bedingungen). Diese Lizenz gilt nur für das Originalmaterial. Alle gekennzeichneten Fremdinhalte (z.B. Abbildungen, Fotos, Tabellen, Zitate etc.) sind von der CC-Lizenz ausgenommen. Für deren Wiederverwendung ist es ggf. erforderlich, weitere Nutzungsgenehmigungen beim jeweiligen Rechteinhaber einzuholen. <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.de>

1 Einleitung

Wenn Lehrkräfte Mathematik unterrichten, sind sie gefordert adaptiv zu handeln, sie sollten also die Lerninhalte an die Voraussetzungen der Lernenden anpassen (Klieme & Warwas, 2011). In diesem Zusammenhang spielen Aufgaben eine bedeutende Rolle. Welche Aufgabe wann und vor allem für wen geeignet ist, darüber muss die Lehrkraft gute Entscheidungen treffen können. Ferner sollte sie fehlerhafte Schüler*innenlösungen schnell einordnen und geeignete Hilfestellung anbieten können. Um das zu leisten, benötigt eine Lehrkraft diagnostische Kompetenz, also die Fähigkeit, Lernende oder Material nach fachdidaktischen Kriterien angemessen zu beurteilen (Hardy et al., 2019; Parsons et al., 2018). Die Beurteilung von Aufgabenschwierigkeiten und Schüler*innenlösungen ist also Teil der diagnostischen Kompetenz und von grundlegender Bedeutung für die Anpassung des Unterrichts an die Lernziele und Lernherausforderungen der Lernenden (Bromme, 1981; Chapman, 2014; Stein et al., 1996). Insbesondere im Fach Mathematik stellen Aufgaben ein zentrales Gestaltungselement dar, somit sind genaue Einschätzungen von Aufgabenschwierigkeiten elementar für erfolgreichen und lernförderlichen Unterricht. Diagnostische Kompetenz bezieht sich somit nicht allein auf die Einschätzung von Kompetenzen der Lernenden, sondern auch auf die Einschätzung von Unterrichtsmaterial (Leuders & Loibl, 2021; Rieu et al., 2022).

Die Aufgabe in Abbildung 1 zeigt ein Beispiel aus dem Themenbereich der Funktionen, wie es auch in einem Schulbuch wie bspw. Mathewerkstatt 4 (Hußmann et al., 2015), Schnittpunkt 8 (Backhaus et al., 2017) oder Lambacher Schweizer 7 (Freudigmann et al., 2020) zu finden ist. In der Aufgabe wird die Geschwindigkeit eines Rennwagens während der zweiten Runde auf der Strecke dargestellt. Gefragt wird nach der Anzahl der Kurven, durch die der Rennfahrer in jeder Runde fahren muss.

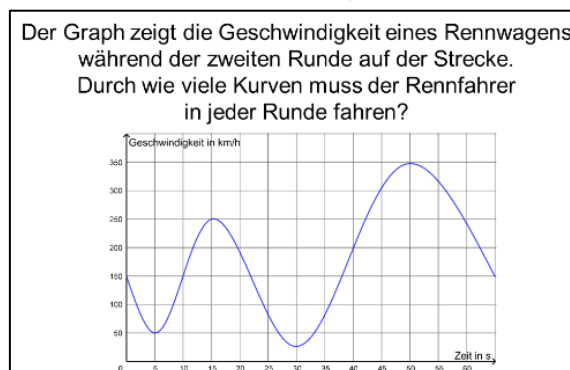


Abbildung 1: Beispielaufgabe aus der Fortbildung, die den Graph-als-Bild-Fehler zeigt (eigene Darstellung)

Eine Lehrkraft steht bei der Einschätzung der Schwierigkeit dieser Aufgabe nicht nur vor der Frage, ob diese für ihre Klasse leichter oder schwerer zu bearbeiten ist als eine ähnliche Aufgabe, oder wie häufig die Aufgabe wahrscheinlich richtig oder falsch gelöst werden wird (Ostermann et al., 2015). Vielmehr kann und sollte sich eine Lehrkraft die Fragen stellen, auf welche Schwierigkeiten die Lernenden bei der Bearbeitung der Aufgabe stoßen oder welche Fehler sie vermutlich machen werden. Außerdem sollte eine Lehrkraft Fehler in Schüler*innenlösungen schnell erkennen und in Kategorien einordnen können (z. B. systematischer Fehler, dem eine fehlende Grundvorstellung zugrunde liegt; Rechenfehler; Flüchtigkeitsfehler). Ferner ist für eine angemessene Lernunterstützung entscheidend, beurteilen zu können, welche Ursachen den Schwierigkeiten bzw. Fehlern zugrunde liegen und welche Fördermaßnahme zu einer erfolgreichen Lernentwicklung führen wird.

In diesem Beispiel sollte eine Lehrkraft also erkennen, dass Lernende, welche keine Vorstellung der Kovariation und keine Zuordnungsvorstellung (s. Kap. 3.1) ausgebildet

haben, diesen Graphen vermutlich nur als Ganzes betrachten werden und somit den Verlauf der Grafik als Abbild der Rennstrecke deuten würden. Diese Lernenden würden dann fälschlicherweise antworten, dass der Rennwagen durch vier Kurven pro Runde fahren muss, anstatt durch zwei. Eine Lehrkraft, die dies schnell erkennt, wird also wissen, warum dieser Fehler gemacht wird, und ist somit in der Lage eine angemessene Förderung der entsprechenden Grundvorstellungen zu leisten.

Diese diagnostische Kompetenz der Aufgabeneinschätzung ist keine einfache Fähigkeit, es braucht konkretes Wissen, aber auch Routinen. Es stellt sich also die Frage: Wie erwirbt man als Lehrkraft diese Kompetenz? Würde man die wichtigsten Kenntnisse lediglich in einem Vortrag vermitteln, dann besteht die Gefahr, dass solches Wissen träge bleibt und nicht effektiv angewendet wird.

Van Merriënboer und Kirschner (2017) entwickelten das *4-Component-Instructional-Design-Modell* (4C/ID-Modell), welches den Rahmen für die Entwicklung von Lernumgebungen für den Erwerb von komplexen Fähigkeiten in beruflichen Kontexten bietet. Das Instruktionsmodell formuliert auf der Basis lernpsychologischer Befunde Prinzipien, wie Lernsituationen für komplexe Fähigkeiten gestaltet sein sollten.

In diesem Artikel möchten wir exemplarisch zeigen wie eine Fortbildung unter Verwendung von Prinzipien des 4C/ID-Modells gestaltet und aufgebaut werden kann, um komplexe Kompetenzen in einer Fortbildungsmaßnahme zu fördern. Dazu stellen wir eine nach den Prinzipien des 4C/ID-Modells konzipierte Fortbildung vor, die die Frage beantwortet, wie Diagnosefähigkeiten der Aufgabeneinschätzung am Beispiel von Aufgaben zu Funktionen gefördert werden können. Die hier vorgestellte Fortbildung baut auf Erfahrungen und Befunden aus einem aktuellen Forschungsprojekt auf, das die relevanten fachdidaktischen Aspekte dieser Kompetenz der Aufgabeneinschätzung empirisch untersuchte (Brunner et al. 2021, 2024).

2 Erwerb komplexer Fähigkeiten in Fortbildungen nach dem 4C/ID-Modell

2.1 Erwerb komplexer diagnostischer Fähigkeiten

Die Einschätzung von Aufgaben und fehlerhaften Schüler*innenlösungen sowie die Entscheidung für geeignete Fördermaßnahmen stellt eine komplexe Kompetenz im Alltag einer Lehrkraft dar. Die Beurteilung einer Schüler*innenleistung auf Grundlage von Aufgabenlösungen kann nur dann adäquat erfolgen, wenn die Aufgabe und die darin enthaltenen Schwierigkeiten genau eingeschätzt werden können. Lehrkräfte müssen dazu potenzielle Herausforderungen in Aufgaben wahrnehmen und Ursachen für Schüler*innenfehler kennen, um die Lernenden gezielt fördern zu können (Brunner et al., 2024; Leuders & Loibl, 2021; Rieu et al., 2022).

Kompetenzen beziehen sich dabei einerseits funktional auf Situationen und Anforderungen in Domänen, dienen also dazu, Probleme in bestimmten Inhaltsbereichen zu lösen (Weinert, 2001). Andererseits beinhalten Kompetenzen kognitive Leistungsdispositionen, also Wissensarten, die eine erfolgreiche Problembewältigung ermöglichen, wie das Wissen über Konzepte, Prinzipien und Prozeduren (Klieme & Leutner, 2006).

Um eine Fortbildungsmaßnahme zum Erwerb diagnostischer Kompetenzen erfolgreich durchzuführen, ist es notwendig, die Grundlagen des Lernens der Lehrkräfte genauer zu betrachten. Beim Lernen werden Informationen im Arbeitsgedächtnis verarbeitet. Wenn alle relevanten Informationen gleichzeitig im Arbeitsgedächtnis verarbeitet werden, entsteht Wissen, das dauerhaft im Langzeitgedächtnis gespeichert wird (Leuders et al., 2020). Um Kompetenzen zu erwerben, muss komplexes Wissen aufgebaut und handlungsnah angewendet werden. Da das Arbeitsgedächtnis nur eine begrenzte Speicherkapazität hat (Miller, 1956), muss bei Fortbildungsmaßnahmen zum Erwerb dia-

gnostischer Kompetenzen darauf geachtet werden, diese Kapazität nicht zu überschreiten. Würde diese Grenze überschritten werden, bestünde die Gefahr, dass das Lernen und somit der Kompetenzerwerb ausbleiben (Leuders et al., 2020). Darüber hinaus ist es für den Aufbau von Kompetenzen elementar, die unterschiedlichen Wissensarten miteinander in Beziehung zu setzen. In unserem Beispiel ist das Wissen über Konzepte, das Wissen über Prinzipien sowie das Wissen über Prozeduren eine Voraussetzung, um adäquate Aufgabendiagnosen und Fördermaßnahmen erstellen zu können. Für die Umsetzung von Hilfestellungen zur Aufgabenbearbeitung muss die Lehrkraft bspw. erkennen, welche Ursache einem bestimmten Schüler*innenfehler zu Grunde liegt (Wissen über Konzepte). Die Lehrkraft muss erklären können, welche Grundvorstellungen einen Lernzuwachs verhindern bzw. fördern können und welche Fördermaßnahmen einen Aufbau von förderlichen Grundvorstellungen bewirken (Wissen über Prinzipien). Die Lehrkraft muss Schritte zur Überwindung der Lernhürde anbieten können (Wissen über Prozeduren).

Eine weitere Facette diagnostischer Kompetenzen sind Fertigkeiten, die automatisiert ablaufen, wie beispielsweise das Beobachten der Lernenden, um festzustellen, wo Unterstützung notwendig sein könnte. Diese automatisierten Handlungen bedürfen vieler Lerngelegenheiten, die im Anschluss an eine Fortbildungsmaßnahme in der Unterrichtspraxis stattfinden. Die Fortbildung legt die Grundlage für das Erlernen der automatisierten Handlungen in der Praxis.

Um diesen Erwerb komplexer Kompetenzen in Fortbildungsmaßnahmen erreichen zu können, wurde von van Merriënboer und Kirschner (2017) das Instruktionsmodell *4-Component-Instructional-Design* (4C/ID) entwickelt. Das Modell wird als Grundlage für die Entwicklung von Fortbildungsmaßnahmen und Bildungsangeboten in den unterschiedlichsten Fachgebieten herangezogen. Kreutz et al. (2020) zeigen in ihrem Buch zur Professionsorientierung in der Lehrer*innenbildung verschiedene Umsetzungsbeispiele in der Hochschullehre auf. Die in diesem Beitrag vorgestellte Fortbildungsmaßnahme beruht auf den im Folgenden beschriebenen wichtigen Prinzipien des 4C/ID-Modells, die so auch für die Konzeption weiterer Fortbildungsmaßnahmen als Grundlage verwendet werden können.

2.2 Fortbildung nach dem 4C/ID-Modell

Bei der Durchführung von Fortbildungen nach dem 4C/ID-Modell werden vier Komponenten angewendet (Lernaufgaben, unterstützende Informationen, prozedurale Informationen, Einübung von Teilaufgaben), die im Folgenden erläutert werden. Das Herzstück des Modells bilden Lernaufgaben, die authentische Handlungssituationen, sogenannte *real-life tasks* nachahmen. Lernaufgaben beinhalten wesentliche Teile der Ziel-Kompetenz in handlungsnahen Anwendungssituationen und steigern sich in ihrer Komplexität nach einem vorgegebenen Schema. Dabei wird die maximale Leistung des Arbeitsgedächtnisses berücksichtigt (van Merriënboer & Kirschner, 2017). Im Lernprozess werden die zu bewältigenden Lernaufgaben an das steigende Kompetenzniveau der Teilnehmenden angepasst (Leuders et al., 2020). Um die verschiedenen Wissensarten (Konzepte, Prinzipien und Prozeduren) gleichermaßen anzusprechen, liegen den Lernaufgaben authentische Situationen zugrunde, die einerseits immer wiederkehrende Aspekte, andererseits einzigartige Aspekte beinhalten. In Kapitel 3 werden die für die hier vorgestellte Fortbildung entwickelten Lernaufgaben beschrieben.

Um insbesondere die einzigartigen Aspekte bearbeiten zu können, erhalten die Teilnehmenden *unterstützende Informationen*. Diese beziehen sich in der Regel auf spezifisches fachliches oder fachdidaktisches Wissen, wie beispielsweise Wissen zu typischen Schüler*innenfehlern. Diese Informationen sind für die Teilnehmenden jederzeit zugänglich.

Um die wiederkehrenden Aspekte einer Lernaufgabe zu bearbeiten, erhalten die Teilnehmenden *prozedurale Informationen*, also Informationen, wie sie beim Diagnostizieren vorgehen, um gute Entscheidungen treffen zu können. Diese Informationen beziehen sich beispielsweise auf das Finden von in einer Aufgabe oder einer Schüler*innenlösung enthaltenen relevanten Stellen, um die Aufgabenschwierigkeit beurteilen zu können, oder auf die Ermittlung der fehlenden Grundvorstellung, um Entscheidungen über geeignete Fördermaßnahmen treffen zu können. Zu Beginn der Fortbildung werden diese Informationen häufig gegeben, jedoch mit zunehmendem Lernfortschritt verringert.

3 Lernaufgaben als Grundlage der Fortbildung

3.1 Struktur der Lernaufgaben

Ziel der Fortbildung ist, dass Teilnehmende die authentische diagnostische Handlung, also die real-life task, bewältigen können. Die real-life task, auf welche in der hier beschriebenen Fortbildung vorbereitet wird, ist Folgende: Eine Lehrkraft sollte Aufgaben zum funktionalen Denken sowie Schüler*innenlösungen diagnostizieren können und in der Lage sein, eine angemessene Lernunterstützung zu geben. Dazu ist es notwendig, beurteilen zu können, welche Ursachen den Schwierigkeiten bzw. Fehlern der Lernenden zugrunde liegen, um entscheiden zu können, welche Fördermaßnahmen für eine erfolgreiche Lernentwicklung geeignet sind.

Lernaufgaben für Fortbildungen nach dem 4C/ID-Modell stellen diese real-life task in authentischen, realitätstreuen Handlungssituationen nach und variieren hinsichtlich bestimmter Aspekte (Klein & Wittwer, 2020). Außerdem beinhalten diese Lernaufgaben unterstützende Informationen, welche mit zunehmendem Lernzuwachs reduziert werden (van Merriënboer & Kirschner, 2017). Ziel der hier vorgestellten Fortbildung ist es, die komplexe diagnostische Kompetenz der Einschätzung von Aufgaben und Schüler*innenlösungen zu erwerben und daraus resultierende Lerngelegenheiten für Lernende gestalten zu können. Konkret ist damit die Fähigkeit gemeint, Aufgaben einschätzen zu können, um zu entscheiden, an welchen Stellen Schwierigkeiten zu erwarten sind, welche Fehler auftreten werden und welche Hilfestellungen Lernende benötigen. Im Folgenden wird zunächst die Struktur der Lernaufgaben genauer beschrieben. Anschließend wird der Aufbau der Lernaufgaben nach dem 4C/ID-Modell dargestellt.

Authentizität und Realitätstreue

Das für diese Fortbildung konzipierte Material, welches zur Diagnose herangezogen wird, besteht aus Aufgaben, die dem Themenbereich der Funktionen entstammen. Funktionen sind relevanter Bestandteil der Klassenstufen 8 und 9 und auch im Alltag (Zeitung, Statistiken usw.) eine häufig anzutreffende Thematik. Um im Folgenden den Begriff „Aufgabe“ klar zu definieren, wird für die Aufgaben, die diagnostiziert werden sollen, der Begriff *Funktionsaufgabe* verwendet, die Aufgaben, die den Teilnehmenden in der Fortbildung gestellt werden, sind *Lernaufgaben*. Jede Funktionsaufgabe besteht aus einer kurzen Situationsbeschreibung, einer Frage und einem Funktionsgraphen. Einige der Funktionsaufgaben provozieren typische und in der mathematikdidaktischen Literatur gut dokumentierte Schüler*innenfehler (Hattikudur et al., 2012; Nitsch, 2015). Typische Fehler sind Fehler, welche bei einem bestimmten Aufgabentyp bzw. einer bestimmten Fragestellung überdurchschnittlich häufig vorkommen. Das für die Einschätzung der Aufgabenschwierigkeit relevante Merkmal ist die Stelle im Funktionsgraph, an welcher die typische Schüler*innenschwierigkeit zu erkennen ist. Diese Funktionsaufgaben wurden in einer Studie zu diagnostischen Prozessen evaluiert (Brunner et al., 2021). Eine kurze Beschreibung dieser Evaluation sowie die Beschreibung der wich-

tigsten Ergebnisse erfolgen in Kapitel 4. Die in der Fortbildung verwendeten Funktionsaufgaben provozieren je einen typischen Schüler*innenfehler, welche in Kapitel 3.1 genauer beschrieben werden.

Variation

Wie von van Merriënboer und Kirschner (2017) empfohlen, beinhalten die Lernaufgaben sowohl immer wiederkehrende als auch variierende Aspekte. Die gleichbleibenden Aspekte sind die in der Funktionsaufgabe enthaltenen relevanten Merkmale. Jede Funktionsaufgabe enthält genau ein relevantes Merkmal, welches anzeigt, dass ein typischer Schüler*innenfehler auftreten kann. Die Stelle, an der das Merkmal zu finden ist und der Fehlertyp, welcher durch die Funktionsaufgabe provoziert wird, variieren hingegen.

Unterstützung

Die Lernaufgaben enthalten mit zunehmender Kompetenz der Teilnehmenden abnehmende Unterstützung, ähnlich wie bei dem Konzept des Scaffolding (Kniffka & Rölcke, 2015; van Nooijen et al., 2024). Begonnen wird mit einem Lösungsbeispiel, welches von den Teilnehmenden nachvollzogen werden muss (Klein & Wittwer, 2020). Diese Form ist die maximale Unterstützung, bei welcher alle zur Problemlösung relevanten Informationen zur Verfügung gestellt werden. Zum Ende der Fortbildung erhalten die Teilnehmenden konventionelle Lernaufgaben, bei denen lediglich der Anfangs- und der Zielzustand bekannt sind. Alle relevanten Schritte zur Lösung des Problems müssen die Teilnehmenden selbst bestimmen. Der konkrete Aufbau dieser abnehmenden Unterstützung wird in Kapitel 3.2 genauer beschrieben.

3.2 Fachdidaktische Hintergründe zu den Lernaufgaben

Wenn Schwierigkeiten in Funktionsaufgaben erkannt werden sollen, ist Wissen zu Grundvorstellungen und typischen Schüler*innenfehlern in diesem Bereich grundlegend. Im Folgenden werden zunächst die relevanten Grundvorstellungen funktionaler Zusammenhänge und anschließend beispielhaft drei der im Bereich des funktionalen Denkens typischen und in der Literatur gut dokumentierten Schüler*innenfehler beschrieben (Hattikudur et al., 2012; Nitsch, 2014; Vollrath, 1989).

Aufgaben zu funktionalen Zusammenhängen können drei unterschiedliche Grundvorstellungen ansprechen: Zuordnungsvorstellung; Kovariationsvorstellung oder Objektvorstellung (Greefrath et al., 2013; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989).

Wird die Vorstellung der *Zuordnung* angesprochen, so liegt die Aufmerksamkeit auf der festgelegten Abhängigkeit zweier Größen zueinander. Einem Wert x (Definitionsreich) wird genau ein Wert $f(x)$ (Wertebereich) zugeordnet (Rolfes et al., 2013). Es wird also nur genau eine festgelegte Stelle der Zuordnung in der Funktion betrachtet. Eine typische Frage, die den Zuordnungsvorstellung anspricht, wäre: „Wie viele Personen waren zum Zeitpunkt $x = 15$ im Freibad anwesend?“, wobei x die Uhrzeit und $f(x)$ die Anzahl der anwesenden Personen im Freibad angibt.

Wird die Vorstellung der *Kovariation* angesprochen, so liegt die Aufmerksamkeit darauf, wie sich Änderungen einer Größe auf eine abhängige Größe auswirken (Vollrath, 1989). Diese Vorstellung bezieht sich also auf die Steigung einer Funktion und drückt sich in der Beziehung aus, wie sich der Wert einer abhängigen Variable $f(x)$ ändert, wenn sich der Wert der unabhängigen Variable x in einer systematischen Weise verändert (Pittalis et al., 2020; Rolfes et al., 2013). Eine typische Frage, die die Vorstellung der Kovariation anspricht, wäre: „Welcher Läufer war zum Zeitpunkt $x = 5$ am schnellsten?“, wobei x die Zeit und $f(x)$ die zurückgelegte Strecke der Läufer angibt (siehe Abbildung 2).

Wird die *Objektvorstellung* angesprochen, so liegt die Aufmerksamkeit auf einem gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes. Es werden also nicht nur einzelne Wertepaare wie bei den anderen beiden Grundvorstellungen betrachtet, sondern die

Menge aller Wertepaare als mathematisches Objekt (Vollrath, 1989). Eine typische Frage, die die Objektvorstellung anspricht, wäre: „Durch wie viele Kurven muss ein Rennfahrer auf der Rennstrecke fahren?“, wobei x die Zeit und $f(x)$ die Geschwindigkeit des Rennwagens angibt (siehe Abbildung 1).

In verschiedenen Studien konnte gezeigt werden, dass diese Grundvorstellungen funktionaler Zusammenhänge bei Lernenden häufig nicht ausreichend ausgebildet sind, wodurch gehäuft typische Schüler*innenfehler entstehen (Hattikudur et al., 2012; Malle, 2000; Nitsch, 2015). Auch wir konnten in einer Studie, in der wir 168 Lernende gebeten haben, 20 Aufgaben zu Funktionen zu lösen, zeigen, dass die falsch gelösten Aufgaben überdurchschnittlich häufig den typischen Schüler*innenfehler als Grund haben (Brunner et al., 2021). Auf Ergebnisse der Studie gehen wir im folgenden Abschnitt ein, in welchem die typischen Schüler*innenfehler beschrieben werden. Die in dieser Studie getesteten Aufgaben waren dieselben, welche wir 49 angehenden Lehrkräften zur Einschätzung der Aufgabenschwierigkeit vorgelegt haben, um zu untersuchen, ob eine Intervention die Einschätzung der Schwierigkeiten in Aufgaben verbessern kann (Brunner et al., 2024). Auf diese Untersuchung gehen wir in Kapitel 5 genauer ein.

Tabelle A.1 im Online Supplement zeigt Informationen zu den typischen Schüler*innenfehlern, wie sie auch in der hier vorgestellten Fortbildung verwendet werden. Auf drei der typischen Schüler*innenfehler gehen wir hier genauer ein. Die weiteren typischen Schüler*innenfehler können auch als Unterformen der hier beschriebenen verstanden werden.

Lernende, welche den Fehler „Steigung-Höhe-Verwechslung“ begehen, verwechseln die Steigung des Graphen mit dem maximalen Funktionswert an einer Stelle x (Nitsch, 2015). Eine mögliche Ursache hierfür ist, dass keine Vorstellung von Steigung als Veränderung ausgebildet wurde, also die Vorstellung der Kovariation nicht hinreichend ausgebildet wurde und der Graph lediglich als Zuordnung einzelner Wertepaare betrachtet wird (Vollrath, 1989).

Das folgende Beispiel (Abbildung 2) des Fehlertyps „Steigung-Höhe-Verwechslung“ beschreibt das Zustandekommen eines typischen Schüler*innenfehlers genauer. Hier zeigt der Graph die von drei Läufern zurückgelegte Strecke, die Frage bezieht sich auf den Graphen, der den schnellsten Läufer bei $t = 5$ s zeigt.

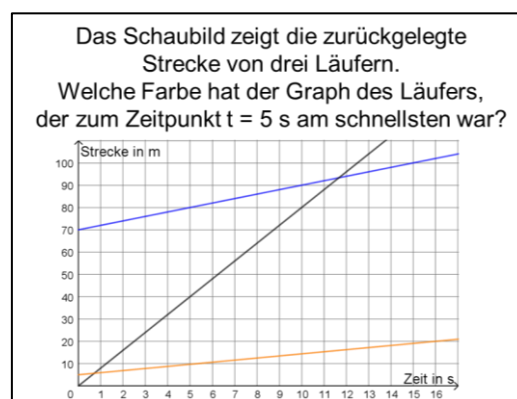


Abbildung 2: Beispielaufgabe mit fehlerhafter Schüler*innenlösung für den Fehlertyp Steigung-Höhe-Verwechslung (übersetzt aus Brunner et al., 2021)

Lernende, die die Steigung mit der Höhe verwechseln, verwechseln die Steigung mit dem Maximalwert (der Höhe) an einem bestimmten Punkt der x -Achse (Nitsch, 2015; Russell et al., 2009). Bei dieser Aufgabe würden sie antworten, dass der obere Graph, der des schnellsten Läufers ist. Die richtige Antwort wäre der mittlere Graph, da dieser die größte Steigung aufweist. In unserer Schüler*innenstudie zeigte sich, dass unter den falsch gelösten Aufgaben, welche die Verwechslung von Steigung und Höhe provozierten, 55 Prozent auf diesen typischen Fehler zurückgehen.

Lernende, welche den „*Graph-als-Bild-Fehler*“ machen, deuten den Graph als reales bzw. geometrisches Abbild der Situation (Nitsch, 2015). Eine mögliche Ursache hierfür ist ebenfalls, dass Vorstellung der Kovariation bei diesen Lernenden nicht hinreichend ausgebildet ist. Der Graph wird hierbei nicht als Abhängigkeit gedeutet, sondern nur als ganzes mathematisches Objekt betrachtet (Vollrath, 1989). Abbildung 1 (siehe Kapitel 1) zeigt eine Aufgabe, welche den Graph-als-Bild-Fehler provoziert. In unserer Schüler*innenstudie zeigte sich, dass unter den falsch gelösten Aufgaben, welche den Graph-als-Bild-Fehler provozierten, 90 Prozent auf diesen typischen Fehler zurückgehen.

Lernende, welche den Fehlertyp „*Verwechslung des Steigungsparameters mit dem Schnittpunkt der X-Achse*“ machen, setzen anstatt des Steigungsparameters m den Schnittpunkt mit der x -Achse in die Funktionsgleichung ein (Nitsch, 2015). Eine mögliche Ursache hierfür ist, dass der Fokus auf den beiden Schnittpunkten mit den Achsen liegt, mit der Folgerung, dass der Schnittpunkt mit der x -Achse ebenfalls im Funktionsterm abzulesen sein müsste, so wie der y -Achsenabschnitt auch. In unserer Schüler*innenstudie zeigte sich, dass unter den falsch gelösten Aufgaben, welche die Verwechslung des Steigungsparameters mit dem Schnittpunkt der X -Achse provozierten, 60% auf diesen typischen Fehler zurückgehen, wenn die Funktionsgleichung selbständig aufgestellt werden soll und 90%, wenn die Funktionsgleichung aus vorgegebenen Antwortmöglichkeiten gewählt werden soll. Tabelle 1 im Online-Supplement zeigt die Informationen über die typischen Schüler*innenfehler so, wie sie auch in der Fortbildung verwendet werden.

4 Ablauf einer Fortbildung nach den Prinzipien von 4C/ID

Ziel der Fortbildung ist, dass Teilnehmende die real-life task bewältigen können. Sie sollen also erkennen, auf welche Schwierigkeiten Lernende bei der Bearbeitung von Funktionsaufgaben stoßen werden oder welche Fehler sie vermutlich machen werden. Die Teilnehmenden sollen also Fehler in Schüler*innenlösungen schnell erkennen und in Kategorien einordnen können (z.B. systematischer Fehler, dem eine fehlende Grundvorstellung zugrunde liegt; Rechenfehler; Flüchtigkeitsfehler). Ferner sollen sie in der Lage sein, eine angemessene Lernunterstützung zu geben. Dazu ist es notwendig, beurteilen können, welche Ursachen den Schwierigkeiten bzw. Fehlern zugrunde liegen, um entscheiden zu können, welche Fördermaßnahmen für eine erfolgreichen Lernentwicklung geeignet sind.

Um das zu erreichen, wurden Lernaufgaben entwickelt, die sich in ihrer Intensität steigern und somit an die Kompetenz der Lernenden angepasst werden können. Die in Kapitel 3.1 beschriebenen Funktionsaufgaben bilden die Grundlage der Lernaufgaben. In Tabelle 2 werden die komplexer werdenden Lernaufgaben inklusive der gleichbleibenden und variierenden Aspekte sowie der abnehmenden Unterstützung beschrieben. Die Fortbildung folgt dem in der Tabelle 2 beschriebenen Schema, wobei in jeder Phase die Möglichkeit besteht, mehr oder weniger Lernaufgaben zu bearbeiten. Wichtig ist, dass zu jedem Zeitpunkt auf alle unterstützenden Informationen zurückgegriffen werden kann, jedoch in abnehmender Intensität. Um passende Fördermaßnahmen in die Fortbildung zu inkludieren, verweisen wir auf eine Homepage, welche im Rahmen eines von der EU-Kommission geförderten Projekts entstanden ist (<http://funthink.eu/>). Hier werden zu allen angesprochenen Grundvorstellungen funktionalen Denkens Fördermöglichkeiten angeboten und in gut aufbereiteten Videobausteinen erklärt.

Begonnen wird mit Lernaufgaben, welche lediglich die Nachahmung beziehungsweise das Nachvollziehen der real-life task darstellen, d.h., die erste Lernaufgabe ist also ein Lösungsbeispiel, in welchem alle notwendigen Informationen gegeben sind. Auf unterstützende Informationen zu den typischen Schüler*innenfehlern kann ebenfalls zurückgegriffen werden. Ziel dieser ersten Lernaufgabe ist es, die Entscheidungen, die hier

getroffen wurden, nachzuvollziehen. Diese Lernaufgabe sollte in mehrfacher Ausführung zu den unterschiedlichen typischen Schüler*innenfehlern vorhanden sein. Die Teilnehmenden können selbst entscheiden, wann sie zur nächsten Lernaufgabe weitergehen. Dadurch kann die Steigerung des Niveaus an den persönlichen Kompetenzfortschritt angepasst werden.

In dieser ersten Lernaufgabe wird wie in allen weiteren Lernaufgaben eine Funktionsaufgabe mit typischem Schüler*innenfehler gezeigt. Einzigartig ist in diesem ersten Schritt, dass die für die Einschätzung relevanten Stellen markiert sind und beschrieben wird, welche Informationen aus diesen Stellen gezogen werden können, also welche Schwierigkeiten und typischen Fehlerstellen in dieser Funktionsaufgabe vorhanden sind. Außerdem werden Informationen dazu gegeben, welche fehlende Grundvorstellung dem typischen Fehler zugrunde liegt und wie diese gefördert werden kann.

Hierbei ist zu beachten, dass generell mit Funktionsaufgaben gefördert wird, die die fehlende Grundvorstellung ansprechen, um diese Vorstellung nach und nach aufzubauen. Hierzu wird auf schon vorhandenes, sehr gut ausgearbeitetes und evaluiertes Material, wie beispielsweise dem von „funThink“, zurückgegriffen (<http://funthink.eu/>).

Nach dieser ersten Stufe der Lernaufgaben, werden die Lernaufgaben in den weiteren Stufen im Niveau nach und nach gesteigert. Im zweiten Schritt werden ähnliche Funktionsaufgaben und Schüler*innenlösungen wie bei den Lernaufgaben in Schritt eins gegeben, außer, dass nun die relevanten Stellen selbst gefunden werden müssen. Auch hier sollte eine ausreichende Anzahl an Lernaufgaben vorhanden sein, um diese Stufe für die verschiedenen typischen Schüler*innenfehler wiederholen zu können. Teilnehmende müssen jedoch nicht auf jeder Stufe alle Lernaufgaben zu allen typischen Schüler*innenfehlern bearbeiten, um zur nächsten Stufe weitergehen zu können. Die Kompetenz, Schwierigkeiten oder typische Fehlerstellen in Funktionsaufgaben diagnostizieren zu können, kann auch stellvertretend über einzelne typische Schüler*innenfehler gelernt werden. Im Verlauf der Fortbildung sollte jedoch mit allen typischen Schüler*innenfehlern mehrmals gearbeitet worden sein, um die fachdidaktischen Hintergründe zu verinnerlichen. Daher empfiehlt es sich, die Reihenfolge der Lernaufgaben auf den einzelnen Stufen so anzupassen, dass jeweils unterschiedliche typische Schüler*innenfehler am Anfang bearbeitet werden.

Die weiteren Stufen, die von den Teilnehmenden chronologisch bearbeitet werden sollen, sind genauso aufgebaut wie eben für die ersten beiden Stufen beschrieben. Das heißt, sobald sich eine oder Teilnehmende*r auf einer Stufe sicher fühlt, kann er oder sie selbstständig zu nächsten Stufe übergehen und die neuen, komplexer werdenden Lernaufgaben bearbeiten.

Diese Fortbildung kann mit oder ohne digitale Unterstützung erfolgen. Eine digital gestützte adaptive Umsetzung kann erfolgen, indem die Lernaufgaben in eine digitale Lernumgebung eingebettet werden, in der erst dann zum nächsten Schritt weitergeklickt werden kann, sobald ausreichend Lernaufgaben aus dem aktuellen Schritt korrekt gelöst wurden. Ohne digital unterstützte Adaptivität wird die Entscheidung, zur nächsten Lernaufgabe bzw. zum nächsten Schritt weiterzugehen, von den Teilnehmenden individuell und eigenständig getroffen. Wichtig ist, dass zu jedem Schritt ausreichend Lernaufgaben vorhanden sind, die die verschiedenen typischen Schüler*innenfehler abdecken, und die unterstützenden Informationen zu den typischen Schüler*innenfehler weiterhin jederzeit verfügbar sind. Die prozeduralen Informationen nehmen hingegen, so wie oben beschrieben, bei jedem Schritt ab.

Die letzte Lernaufgabe besteht darin, dass die real-life task nachgeahmt wird, das heißt, es wird ein kompletter Diagnosedurchgang durchlaufen, in welchem nur die Funktionsaufgabe sowie eine Schüler*innenlösung zu sehen ist, alle Entscheidungen müssen nun so wie in der authentischen Handlungssituation selbst getroffen werden.

Die hier beschriebene Fortbildung zeigt beispielhaft, wie eine 4C/ID-Fortbildung entwickelt werden kann, um komplexe Fähigkeiten zu schulen. Mithilfe dieser Grundstruktur können weitere Fortbildungen zu anderen Themen entwickelt werden.

Tabelle 1: Lernaufgaben der 4C/ID-Fortbildung (eigene Darstellung)

Komplexität	Funktionsaufgabe mit Schüler*innenlösung	Relevante Stellen der Funktionsaufgabe	Beschreibung des Schüler*innenfehlers	Geeignete Fördermaßnahme formulieren	Beschreibung der Lernaufgabe	
Lösungsbeispiel	gegeben	gegeben	gegeben	gegeben	Teilnehmende erhalten (1) eine Schüler*innenlösung mit Informationen zu dem in der Funktionsaufgabe enthaltenen typischen Schüler*innenfehler und (2) Informationen über die Merkmale, die für die Einschätzung der Schwierigkeiten, die in der Funktionsaufgabe stecken, relevant sind, außerdem (3) eine Markierung der Stelle in der Funktionsaufgabe, an der der typische Fehler ersichtlich wird und (4) eine geeignete Fördermaßnahme. Informationen über typische Schüler*innenfehler (siehe Tabelle A.1 im Supplement) sind gegeben.	Wird für alle sechs typischen Schüler*innenfehler wiederholt, bzw. alle Funktionsaufgaben stehen gleichzeitig zur Verfügung.
Imitation	gegeben	finden	gegeben	gegeben	Teilnehmende erhalten (1) eine Schüler*innenlösung mit Informationen zu dem in der Funktionsaufgabe enthaltenen typischen Schüler*innenfehler und (2) Informationen über die Merkmale, die für die Einschätzung der Schwierigkeiten, die in der Funktionsaufgabe stecken, relevant sind. Außerdem wird (3) eine geeignete Fördermaßnahme vorgeschlagen. Teilnehmende sollen die Stelle in der Funktionsaufgabe markieren, an der der typische Fehler ersichtlich wird. Informationen über typische Schüler*innenfehler sind gegeben.	Wird für alle sechs typischen Schüler*innenfehler wiederholt.
Vergleichen und zuordnen	gegeben	teilweise gegeben	vergleichen	auswählen	Teilnehmende erhalten (1) zwei Funktionsaufgaben mit unterschiedlichen typischen fehlerhaften Schüler*innenlösungen und (2) Informationen über die Merkmale, die für die Einschätzung der Schwierigkeiten relevant sind. Außerdem werden ihnen (3) verschiedene Fördermaßnahme vorgeschlagen. Sie sollen die Stelle in der Funktionsaufgabe markieren, an der der typische Fehler ersichtlich wird und die typischen Schüler*innenfehler miteinander vergleichen. Außerdem sollen sie geeignete Fördermaßnahmen auswählen. Informationen über typische Schüler*innenfehler sind gegeben.	

Vervollständigen und zuordnen	gegeben	teilweise gegeben	finden	auswählen	Teilnehmende erhalten (1) eine Funktionsaufgabe mit einer typisch fehlerhaften Schüler*innenlösung und (2) Informationen über die Merkmale, die für die Einschätzung der Schwierigkeiten relevant sind. Außerdem werden ihnen (3) verschiedene Fördermaßnahmen vorgeschlagen. Sie sollen die Stelle in der Funktionsaufgabe markieren, die den typischen Schüler*innenfehler anzeigt und den typischen Schüler*innenfehler, der in dieser Lösung steckt, beschreiben. Außerdem sollen sie geeignete Fördermaßnahmen auswählen. Informationen über typische Schüler*innenfehler sind gegeben.	Wird für alle sechs typischen Schüler*innenfehler wiederholt.
Konventionelle Lernaufgabe und Zuordnung	gegeben	finden	finden	auswählen	Teilnehmende erhalten (1) mehrere Funktionsaufgaben / Schüler*innenlösungen, die eingeschätzt werden sollen und (2) verschiedene Fördermaßnahmen. Sie sollen die relevanten Stellen markieren und die passenden Schüler*innenfehler beschreiben. Außerdem sollen sie geeignete Fördermaßnahmen auswählen. Informationen über typische Schüler*innenfehler können bei Bedarf abgerufen werden.	Funktionsaufgaben enthalten drei verschiedene der sechs möglichen Schüler*innenfehler.
Konventionelle Lernaufgabe	gegeben	finden	finden	finden	Teilnehmende erhalten (1) mehrere Funktionsaufgaben / Schüler*innenlösungen, die eingeschätzt werden sollen. Sie sollen die relevanten Stellen markieren und die passenden Schüler*innenfehler beschreiben. Außerdem sollen sie geeignete Fördermaßnahmen beschreiben. Informationen über typische Schüler*innenfehler können bei Bedarf abgerufen werden.	Funktionsaufgaben enthalten alle sechs möglichen Schüler*innenfehler.

5 Empirische Grundlage der beschriebenen Fortbildung

5.1 Erkenntnisse zum Einfluss von fachdidaktischem Wissen auf die Kompetenz der diagnostischen Aufgabeneinschätzung

Die beschriebene Fortbildung ist eine exemplarische Weiterentwicklung eines erprobten Seminars. Gewonnene Erkenntnisse aus einer Lehrveranstaltung (Intervention) für Studierende mit ähnlichem Inhalt zeigen große Lerneffekte auf die Aufgabeneinschätzung als Vorhersage über Lösungsprozesse der Lernenden (Brunner et al., 2024). Daher gehen wir von ähnlichen Effekten durch die hier beschriebene Fortbildung aus. Um diesen Hintergrund für die beschriebene Fortbildung darzustellen, werden im Folgenden die wichtigsten Aspekte der empirischen Studie beschrieben.

In der experimentellen Studie wurde untersucht, wie sich eine Vermittlung fachdidaktischen Wissens auf die Kompetenz der diagnostischen Aufgabeneinschätzung auswirkt. Dazu wurden angehende Lehrkräfte vor und nach einer Intervention zu fachdidaktischem Wissen gebeten, die Schwierigkeit von 20 Aufgaben zu Funktionen einzuschätzen und die Einschätzungen zu begründen. Diese Ergebnisse wurden mit einer Kontrollgruppe ohne Intervention verglichen.

Wir gingen der Frage nach, ob diese kurze spezifische Intervention zu fachdidaktischem Wissen über typische Schüler*innenfehler im funktionalen Denken, die Einschätzung und Begründung der Aufgabenschwierigkeit angehender Lehrkräfte signifikant verbessern kann. In dieser Interventionsstudie mit Kontrollgruppe wurde also das fachdidaktische Wissen über typische Schüler*innenfehler im funktionalen Denken manipuliert und der Effekt dieser Manipulation auf die diagnostische Kompetenz geprüft. Im Folgenden beschreiben wir die für die hier vorgestellte Fortbildung relevanten Aspekte

und Ergebnisse der empirischen Studie. Für einen ausführlichen Bericht verweisen wir auf unsere Originalstudie (Brunner et al., 2024).

An der Studie nahmen 49 angehende Mathematiklehrkräfte teil (28 weiblich, 21 männlich; Alter: $M = 23,43$ Jahre, $SD = 2,07$), $n = 30$ wurden zufällig der Interventionsgruppe zugewiesen. Die Mehrheit der Teilnehmenden (73 %) befand sich im 5. oder 6. Semester ihres Lehramtsstudiums einer Pädagogischen Hochschule. Keiner der Teilnehmenden hatte laut Studienordnung sowie eigener Auskunft Vorkenntnisse über typische Schüler*innenfehler im funktionalen Denken. Die Teilnahme war freiwillig, und alle Teilnehmenden wurden vor Beginn der Studie über den Ablauf informiert.

Die Teilnehmenden der Interventionsgruppe nahmen vor dem zweiten Erhebungszeitpunkt an der Intervention über typische Schüler*innenfehler im Bereich der Funktionen teil. Die Teilnehmenden der Kontrollgruppe wurden in einem Abstand von vier Wochen ohne Intervention erneut getestet. Die Veranstaltung fand in zwei 90-minütigen Sitzungen statt, in denen die Teilnehmenden, die in Kapitel 3.1 beschriebenen Lernaufgaben systematisch bearbeiteten. Die Sitzungen fanden im Rahmen eines regulären Seminars statt, das Teil der Studienordnung der Teilnehmenden war.

Wir zeigten den Teilnehmenden während der Erhebung die 20 Aufgaben nacheinander. Sie wurden gebeten, die Schwierigkeit jeder Aufgabe verbal zu bewerten, und zwar auf einer Skala von 1 („sehr leicht“) über 2 („eher leicht“) und 3 („eher schwer“) bis 4 („sehr schwer“). Es gab keinen Zeitdruck. Nach jedem Urteil wurden die Teilnehmenden gebeten, eine Begründung für ihr Urteil abzugeben, welches als unmittelbares retrospektives Verbalprotokoll auditiv erfasst wurde (Konrad, 2010).

Im Anschluss an diese Erhebung wurden die Teilnehmenden gebeten, die 20 Aufgaben als Fachwissenschaftstest selbst zu lösen. Da 90 Prozent der Teilnehmenden die Aufgaben in dem Test richtig lösten, konnten wir davon ausgehen, dass sie über ausreichende Kenntnisse im funktionalen Denken verfügten. Dies deutet darauf hin, dass die Einschätzungen der Teilnehmenden eher mit diagnostischen Kompetenzen als mit fachlichen Schwierigkeiten beim Lösen der Aufgaben zusammenhingen. Dennoch wurden in der Analyse Daten von Aufgaben ausgeschlossen, die die Teilnehmenden im Fachwissenschaftstest falsch gelöst hatten, damit die Ergebnisse nicht durch mangelndes fachliches Wissen beeinflusst werden. Um den Erfolg der Intervention in Bezug auf die Genauigkeit der Einschätzung zu messen, bildeten wir eine Skala zur Qualität der Begründungen der Teilnehmenden. Mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring und Gläser-Zikuda (2008) entwickelten wir ein Kategoriensystem auf vier Ebenen, welches sich induktiv aus dem Datenmaterial ergab. Die Inter-Rater-Reliabilität war mit .95 sehr hoch. Tabelle 3 zeigt die vier Kategorien mit Beschreibung und einem Beispiel für die Äußerungen der Teilnehmenden. Für jede Aufgabe erhielten die Teilnehmenden Punkte zwischen 0 und 3 (siehe Tabelle 2), so dass sich über alle 20 Aufgaben hinweg eine maximale Punktzahl von 60 ergab. Die interne Konsistenz dieser Skala war mit Cronbachs Alpha = .59 ($M = 33.78$, $SD = 5.28$) im ersten Erhebungszeitpunkt akzeptabel und mit .93 ($M = 49.18$, $SD = 13.90$) im zweiten Erhebungszeitpunkt sehr hoch.

Tabelle 2: Hauptkategorien der Urteilsgenauigkeit mit Beschreibung und Beispiel (übersetzt aus Brunner et al., 2024)

Wert	Kategorie	Beschreibung	Beispiel
3	Typische Fehlerstelle benannt oder beschrieben.	Fachbegriff genannt oder inhaltliche Beschreibung des typischen Fehlers: mathematische und reale Situation wurden kombiniert.	Dies könnte irreführend sein, da der blaue Graph über dem schwarzen Graphen liegt, der schwarze Graph aber steiler ist, was zu der Schwierigkeit führen könnte, dass man denkt, der blaue sei schneller.
2	Anteile der typischen Fehlerstelle beschrieben.	Bezug zur realen Situation hergestellt, aber zentrale Schwierigkeit im Graphen nicht genannt ODER Schwierigkeit nur auf mathematischer Ebene beschrieben.	Der Lernende muss in der Lage sein, die Steigung abzulesen, um die Geschwindigkeit der Läufer zu ermitteln.
1	Eine andere als die relevante Schwierigkeit wurde beschrieben.	Allgemeine Aussage, dass die Aufgabe schwierig ist, ohne Bezug zur realen Situation oder zur mathematischen Schwierigkeit.	Weil mehrere Graphen zu sehen sind, die verglichen werden müssen.
0	Keine didaktische Begründung genannt.	Kein Bezug zur Schwierigkeit der Aufgabe hergestellt.	Das muss man halt lesen und verstehen.

Um zu untersuchen, ob die Fortbildungsmaßnahme der Grund für die Verbesserung der Aufgabeneinschätzungen war, berechneten wir eine einfaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung (ANOVA). Aus den Mittelwerten der Urteilsgenauigkeit im ersten Erhebungszeitpunkt (siehe Tabelle 3) geht hervor, dass alle Teilnehmenden über ähnliches Vorwissen verfügten.

Tabelle 3: Urteilsgenauigkeit der Gruppen je Messzeitpunkt (Skala 0 – 3) (eigene Berechnung)

	Mittelwert (SD) erster Erhebungszeitpunkt	Mittelwert (SD) zweiter Erhebungszeitpunkt
Interventionsgruppe	.95 (.28)	2.23 (.57)
Kontrollgruppe	.75 (.28)	.92 (.34)

Im zweiten Erhebungszeitpunkt sehen wir eine signifikante Verbesserung der Interventionsgruppe ($M = 2,3$, $SD = .57$) im Vergleich zur Kontrollgruppe ($M = .92$, $SD = .34$). Es gab einen signifikanten Haupteffekt für die Zeit ($F(1, 47) = 116.60$, $p < .001$, $\eta^2 = .71$) und für die Gruppe, was bedeutet, dass sich die Interventions- und Kontrollgruppe signifikant unterschieden ($F(1, 47) = 71.87$, $p < .001$, $\eta^2 = .94$). Dieses Ergebnis weist auf eine allgemeine Verbesserung der Aufgabeneinschätzungen vom ersten bis zum zweiten Messzeitpunkt sowie zum anderen auf einen allgemeinen Unterschied zwischen der Interventions- und der Kontrollgruppe hin.

Die bedeutsame Wechselwirkung zwischen dem Messzeitpunkt und der Gruppenzugehörigkeit ($F(1, 1, 47) = 69,01$, $p < .001$, $\eta^2 = .595$) zeigt, dass die Teilnehmenden der Interventionsgruppe ihre Aufgabeneinschätzungen signifikant stärker verbesserten als jene der Kontrollgruppe. Die Intervention hatte also einen positiven Effekt auf die Genauigkeit der Aufgabeneinschätzungen. Das heißt, dass die Teilnehmenden auf Grund der Intervention signifikant häufiger typische Schüler*innenfehler in ihrem Aufgabenteil benannten oder beschrieben.

5.2 Reflexion der Ergebnisse in Bezug auf die Fortbildung

Die beschriebene Evaluation einer Intervention auf die Genauigkeit der Aufgabeneinschätzungen bildet die empirische Grundlage für die oben beschriebene Fortbildungsmaßnahme. Es zeigte sich, dass Teilnehmende durch eine kurze Intervention die Schwierigkeiten in Aufgaben signifikant besser beurteilen konnten. In dieser wie auch in weiteren Studien konnte gezeigt werden, dass Fortbildungsmaßnahmen für angehende Lehrkräfte notwendig sind, um Aufgabenschwierigkeiten akkurat einschätzen zu können und das diagnostische Aufgabenpotenzial effektiv zu nutzen (Brunner et al., 2024; Kron et al., 2021; Ostermann, 2018; Rieu et al., 2022). Limitierend ist hier zu erwähnen, dass die beschriebene Studie lediglich eine Intervention zu einem Ausschnitt des Themengebiets der Funktionen evaluiert. Weitere Forschung zu diesen Fragestellungen in weiteren Themenbereichen ist daher wünschenswert.

Die oben beschriebene Fortbildung baut auf den Erkenntnissen der evaluierten Intervention auf, indem sie nicht nur isoliertes Wissen zu typischen Schüler*innenfehlern vermittelt, sondern Wissen in handlungsnahen Lernaufgaben einbettet, um die komplexe diagnostische Kompetenz der Aufgabeneinschätzung als Vorhersage über Lösungsprozesse der Lernenden aufzubauen und daraus resultierende Lerngelegenheiten für Lernende zu gestalten. Eine Evaluation von Langzeiteffekten wäre an dieser Stelle eine interessante Fragestellung.

Die vorgestellte Fortbildung hat zum Ziel, die diagnostische Kompetenz der Aufgabeneinschätzung als Vorhersage über Lösungsprozesse der Lernenden zu fördern, um gezielte und effektive Lerngelegenheiten für Lernende zu gestalten. Aufgrund der empirischen Ergebnisse der vorangegangenen Studie ist anzunehmen, dass die Fortbildung einen ähnlich hohen Effekt auf die diagnostische Kompetenz der Teilnehmenden zeigen wird. Es ist anzunehmen, dass die beschriebene Art und Weise der Fortbildungsmaßnahme, also Fehlertypen in Aufgaben zu erkennen, auch in anderen Themenbereichen einen ähnlichen Erfolg zeigen kann. Wir empfehlen jedoch, neu entwickelte Fortbildungen in weiteren Themenbereichen zunächst zu evaluieren.

Literaturverzeichnis und Internetquellen

- Backhaus, M., Bernhard, I., Fechner, G., Malzacher, W., Stöckle, C., Straub, T. & Wellstein, H. (2017). *Schnittpunkt 8. Mathematik – Differenzierende Ausgabe*. Klett.
- Bromme, R. (1981). *Das Denken von Lehrern bei der Unterrichtsvorbereitung: eine empirische Untersuchung zu kognitiven Prozessen von Mathematiklehrern*. Beltz.
- Brunner, K., Obersteiner, A. & Leuders, T. (2021). How prospective teachers detect potential difficulties in mathematical tasks – an eye tracking study. *Research in Subject Matter Teaching and Learning*, 4 (1), 109–126. https://www.ristal.org/fileadmin/user_upload/RISTAL/PDFs_2021/RISTAL_Brunner_DOI.pdf
- Brunner, K., Obersteiner, A. & Leuders, T. (2024). How pedagogical content knowledge sharpens prospective teachers' focus when judging mathematical tasks: An eye-tracking study. *Educational Studies in Mathematics*, 115, 177–196. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10281-6>
- Chapman, O. (2014). Overall Commentary: Understanding and Changing Mathematics Teachers. In J.-J. Lo, K. R. Leatham & L. R. van Zoest (Hrsg.), *Research in Mathematics Education. Teacher Education* (S. 295–309). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_16
- Freudigmann, H., Haug, F., Rauscher, M., Sandmann, R., Schütz, T., Zmaila, A. (2020). *Lambacher Schweizer 7. Mathematik für Gymnasien*. Klett.
- Greefrath, G., Käpnick, F. & Stein, M. (Hrsg.). (2013). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. WTM-Verlag. <https://doi.org/10.17877/DE290R-6538>

- Hardy, I., Decristan, J. & Klieme, E. (2019). Adaptive Teaching in Research on Learning and Instruction. *JERO – Journal for Educational Research Online*, 11 (2), 169–191. <https://doi.org/10.25656/01:18004>
- Hattikudur, S., Prather, R., Asquith, P., Alibali, M., Knuth, E. & Nathan, M. (2012). Constructing Graphical Representations: Middle Schoolers' Intuitions and Developing Knowledge About Slope and Y-intercept. *School Science and Mathematics*, 112 (4), 230–240. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00138.x>
- Hußmann S., Leuders, T., Prediger, S. & Barzel, B. (2015). *Mathewerkstatt 4*. Baden-Württemberg. Cornelsen.
- Klieme, E. & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. *Zeitschrift für Pädagogik*, 52 (6), 876–903. <https://doi.org/10.25656/01:4493>
- Klieme, E. & Warwas, J. (2011). Konzepte der individuellen Förderung. *Zeitschrift Für Pädagogik*, 57 (6), 805–818. https://www.pedocs.de/frontdoor.php?source_opus=8782
- Kniffka, G. & Roelcke, T. (2015). *Fachsprachenvermittlung im Unterricht*. utb. <https://doi.org/10.36198/9783838540948>
- Konrad, K. (2010). Lautes Denken. In G. Mey & K. Muck (Hrsg.), *Handbuch qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 476–490). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-531-92052-8_34
- Kron, S., Sommerhoff, D., Achtner, M. & Ufer, S. (2021). Selecting Mathematical Tasks for Assessing Student's Understanding: Pre-Service Teachers' Sensitivity to and Adaptive Use of Diagnostic Task Potential in Simulated Diagnostic One-To-One Interviews. *Frontiers in Education*, 6. <https://doi.org/10.3389/educ.2021.604568>
- Leuders, T., Klein, C. & Wittwer, J. (2020). Theoretischer Rahmen. In J. Kreutz, T. Leuders & K. Hellmann (Hrsg.), *Professionsorientierung in der Lehrerbildung* (S. 25–47). Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-658-25046-1_2
- Leuders, T. & Loibl, K. (2021). Beyond Subject Specificity – Student and Teacher Thinking as Sources of Specificity in Teacher Diagnostic Judgments. *RISTAL*, 4 (1), 60–70. <https://doi.org/10.23770/rt1842>
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. Sekundarstufe I/II, 5.-13. Schuljahr. *mathematik lehren*, 17 (6), 8–11.
- Mayring, P. & Gläser-Zikuda, M. (Hrsg.) (2008). *Die Praxis der qualitativen Inhaltsanalyse* (2. Aufl.). Beltz. <http://www.ciando.com/ebook/bid-1350164>
- Miller, G.A. (1956). The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on our Capacity for Processing Information. *Psychological Review*, 63 (2), 81–97. <https://doi.org/10.1037/h0043158>
- Nitsch, R. (2014). Schülerfehler verstehen. Typische Fehlermuster im funktionalen Denken. *mathematik lehren*, 31 (6), 8–11.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-10157-2>
- Ostermann, A. (2018). Factors Influencing the Accuracy of Diagnostic Judgments. In T. Leuders, K. Philipp & J. Leuders (Hrsg.), *Mathematics Teacher Education: Vol. 11. Diagnostic Competence of Mathematics Teachers. Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice*. (S. 95–108). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66327-2_5
- Ostermann, A., Leuders, T. & Nückles, M. (2015). Wissen, was Schülerinnen und Schülern schwer fällt. Welche Faktoren beeinflussen die Schwierigkeitseinschätzung von Mathematikaufgaben? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 36 (1), 45–76. <https://doi.org/10.1007/s13138-015-0073-1>

- Parsons, S., Vaughn, M., Scales, R., Gallagher, M., Parsons, A., Davis, S., Pierczynski, M. & Allen, M. (2018). Teachers' Instructional Adaptations: A Research Synthesis. *Review of Educational Research*, 88 (2), 205–242. <https://doi.org/10.3102/0034654317743198>
- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2020). Young Students' Functional Thinking Modes: The Relation Between Recursive Patterning, Covariational Thinking, and Correspondence Relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51 (5), 631–674. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc-2020-0164>
- Rieu, A., Leuders, T. & Loibl, K. (2022). Teachers' Diagnostic Judgments on Tasks as Information Processing – The Role of Pedagogical Content Knowledge for Task Diagnosis. *Teaching and Teacher Education*, 27 (3) 1–13. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.tate.2021.103621>
- Rolfes, T., Roth, J. & Schnotz, W. (2013). Der Kovariationsaspekt von Funktionen in der Sekundarstufe I. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. WTM-Verlag. https://www.juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2013/rolfes_roth_schnotz_der_kovariationsaspekt_in_der_sekundartstufe_I.pdf
- Russell, M., O'Dwyer, L. & Miranda, H. (2009). Diagnosing Students' Misconceptions in Algebra: Results from an Experimental Pilot Study. *Behavior Research Methods*, 41 (1), 414–424. <https://doi.org/10.3758/brm.41.2.414>
- Stein, M., Grover, B. & Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal*, 33 (2), 455–488. <https://doi.org/10.3102/00028312033002455>
- Van Merriënboer, J. & Kirschner, P. (2017). *Ten Steps to Complex Learning. A Systematic Approach to Four-Component Instructional Design*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315113210>
- Van Nooijen, C., de Koning, B., Bramer, W., Isahakyan, A., Asoodar, M., Kok, E., van Merriënboer, J. & Paas, F. (2024). A Cognitive Load Theory Approach to Understanding Expert Scaffolding of Visual Problem-Solving Tasks: A Scoping Review. *Educational Psychology Review*, 36 (1) <https://doi.org/10.1007/s10648-024-09848-3>
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10 (1), 3–37. <https://doi.org/10.1007/BF03338719>
- Weinert, F. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 17–32). Beltz.

Beitragsinformationen

Zitationshinweis:

Brunner, K., Leuders, T. & Obersteiner, A. (2025). Wie können Diagnosefähigkeiten der Aufgabeneinschätzung gefördert werden? Konzeption einer Fortbildung nach dem 4C/ID-Modell. *HLZ – Herausforderung Lehrer*innenbildung*, 8 (1), 378–394. <https://doi.org/10.11576/hlz-7158>

Eingereicht: 11.04.2024 / Angenommen: 13.12.2024 / Online verfügbar: 07.11.2025

ISSN: 2625–0675



Dieses Werk ist freigegeben unter der Creative-Commons-Lizenz CC BY-SA 4.0 (Weitergabe unter gleichen Bedingungen). Diese Lizenz gilt nur für das Originalmaterial. Alle gekennzeichneten Fremdinhalte (z.B. Abbildungen, Fotos, Tabellen, Zitate etc.) sind von der CC-Lizenz ausgenommen. Für deren Wiederverwendung ist es ggf. erforderlich, weitere Nutzungsgenehmigungen beim jeweiligen Rechteinhaber einzuholen. <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.de>

English Information

Title: How Can Diagnostic Competencies in Task Assessment Be Improved? Conception of a Training Course Based on the 4C/ID Model

Abstract: When teaching mathematics, teachers are required to adapt the content to the requirements of the students. Therefore, diagnostic competence, i.e. the ability to accurately assess learners' performance or the quality of learning materials according to subject-specific pedagogical criteria, is essential. In this context, tasks play an important role. Teachers must be able to accurately decide which tasks are appropriate, when they are appropriate, and, most importantly, for whom they are appropriate. They should also be able to quickly classify incorrect student solutions and offer appropriate support.

The purpose of this article is to illustrate how the ability to assess tasks as a facet of diagnostic competence can be trained.

Based on current research on the influence of pedagogical content knowledge on the competence of diagnostic task assessment in the field of functions, we have designed an in-service training that follows the principles of the *4-Component-Instructional-Design (4C/ID)-model*. Based on findings from learning psychology, the model specifies principles for designing learning situations for complex competencies. The in-service training course described here is a further development of a higher education seminar with similar content. A research-based evaluation of this seminar showed significant effects on students' ability to assess tasks efficiently. The goal of the training presented here is to support the complex diagnostic competence of judging mathematical tasks and student solutions.

This article provides an example of how an in-service training based on the 4C/ID model can be designed to support teachers' complex diagnostic competence in a short training.

Keywords: diagnosis; task analysis; student errors; function (math.); functional thinking; adaptive teaching; instructional design; in-service training